Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Petra Csomos
Dipl. Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
11.4.2008

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Determinanten)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 & 5 & -2 \\ 12 & -7 & -1 & 10 & 0 & 8 \\ 33 & -3 & 27 & 12 & 9 & 0 \\ 42 & 0 & -6 & 1 & 8 & 14 \\ -6 & -9 & 18 & -3 & -15 & 6 \\ 8 & 6 & 0 & 81 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G6 (Cramersche Regel)
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe G7 (Eigenwerte & Eigenvektoren geometrisch)
Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$. Bezeichne φ die lineare Abbildung, die eine Drehung um den Vektor a um den Winkel α darstellt. Sei $E_a = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = 0\}$ die durch den Normalenvektor a definierte Ebene und ψ die lineare Abbildung, die eine Spiegelung an jener beschreibt.
Geben Sie die reellen Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von φ und ψ an. Verzichten Sie dabei auf eine explizite Berechnung der darstellenden Matrizen.

Aufgabe G8 (Eigenwerte & Eigenvektoren)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

Hausübung

Aufgabe H5 (Determinanten) (2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen und die der Inversen, falls diese existieren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 6 & 12 & 24 \\ 4 & 8 & 12 & 20 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H6 (Eigenwerte & Eigenvektoren geometrisch) (6 Punkte)

Bezeichne φ die lineare Abbildung, die eine Punktspiegelung am Ursprung (im $\mathbb{R}^3$) darstellt. Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Bezeichne ψ die lineare Abbildung, die eine Streckung um den Faktor α in Richtung a.

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von φ und ψ ohne Berechnung der darstellenden Matrizen.

Aufgabe H7 (Eigenwerte & Eigenvektoren) (4+4 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4-1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 18. April 2008 vor der Übung.