Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Petra Csomos
Dipl. Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
7.4.2008

1. Übungsblatt zur „Mathematik für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kern & Bild)

Berechnen Sie das Bild und den Kern der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} v$

(b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \mapsto (v_1 + 2v_2, 2v_2 + v_3)^T$

Aufgabe G2 (Injektivität & Surjektivität))

Untersuchen Sie die Abbildungen aus Aufgabe 1 auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe G3 (Matrizen)

Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (9v_3 - v_1, 2v_2 + 3v_1, v_1 + v_2 + v_3)^T$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (3v_3 - 2v_2 - v_1, 5v_2)^T.$$

Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von f,g und $g \circ f$ (bezüglich der Koordinateneinheitsvektoren).

Aufgabe G4 (Gaußscher Algorithmus)

Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann beschreibt die Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a^T x = b\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. (Was ist die geometrische Bedeutung von a und b?)

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2 und E_3, die durch die Vektoren $a_1 = (-1, 2, 3)^T$, $a_2 = (3, -2, 1)^T$, $a_3 = (2, 4, -8)^T$ und die Skalare $b_1 = 7$, $b_2 = 1$, $b_3 = 8$ gegeben sind.

Finden Sie Beispiele von drei Ebenen, die keinen bzw. mehr als einen Schnittpunkt haben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kern & Bild) (2 Punkte)

Berechnen Sie das Bild und den Kern der Abbildung f.

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \mapsto (v_4, v_1 - v_2, v_2 + v_3, 0)^T$$

Aufgabe H2 (Injektivität & Surjektivität) (3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 : (v_1, v_2)^T \mapsto (v_2, v_1 + v_2, v_2 - v_1, v_1)^T$

(c) $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v$

Aufgabe H3 (Matrizen) (2 Punkte)

Seien e_1, e_2, e_3 die Koordinateneinheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei φ die lineare Abbildung, die eine 90°-Drehung um e_3 darstellt. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(b) Sei ψ die lineare Abbildung, die eine 45°-Drehung um e_1 darstellt. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ψ bezüglich der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(c) Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$. Spielt es eine Rolle in welcher Reihenfolge die beiden Drehungen ausgeführt werden?

Aufgabe H4 (Gaußscher Algorithmus) (9 Punkte)

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = 2, b_2 = 9, b_3 = 12, b_4 = -4, b_5 = 4$$

und $E_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_i^T x = b_i\}$ $(i = 1 \ldots 5)$.

(a) Besitzen die fünf Ebenen $E_1, \ldots, E_5$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Berechnen Sie einen, falls es einen gibt.

(b) Wählen Sie drei der fünf Ebenen $E_1, \ldots, E_5$ so, daß diese einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen und geben Sie diesen an.

(c) Wählen Sie drei der fünf Ebenen $E_1, \ldots, E_5$ so, daß diese mehr als einen Schnittpunkt besitzen und geben Sie die Menge der Schnittpunkte an.

(d) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen, die in den Aufgabenteilen (b) und (c) die Gleichungssysteme zur Berechnung der Schnittpunkte definieren.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 11. April 2008 vor der Übung.