ANALYSIS IV, INTEGRATIONSTHEORIE
SOMMERSEMESTER 08, 2-STÜNDIG, TU DARMSTADT

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[BF] Barner/Flohr: Analysis II (Kapitel 15 und 16 enthalten eine gut lesbare Konstruktion des Lebesgue-Maßes und -Integrals für den $\mathbb{R}^n$. In den folgenden Kapiteln werden Integralsätze, allgemeiner als in der Vorlesung, für Differentialformen behandelt.)

[Ba] Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie

[Br] Bröcker: Analysis II und III

[E] Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, Springer 1996 und 2002 (Das empfohlene Buch zu Kapitel 1. Elstrodt entwickelt die allgemeine Theorie explizit und begründet alle Abstraktionsschritte. Darüber hinaus wird die Geschichte der Theorie lebendig gemacht. Das Buch eignet sich auch gut zum Nachschlagen. Es deckt aber nur Kapitel 1 dieser Vorlesung ab.)

[Fo] Forster: Analysis 3. (Das Integral über Funktionen mit kompakten Träger kann man in Kapitel 2 und 3 nachschlagen. Das Lebesgue-Integral wird anders als in der Vorlesung konstruiert. Kapitel 2 unserer Vorlesung folgt weitgehend Kapitel 14 und 15 von Forster.)

[Fl] Floret: Maß– und Integrationstheorie

[H] Hildebrandt: Analysis II, Springer 2003, Kapitel 5 und 6

[Ho] Hochkirchen, Th.: Maß- und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesgue. In: Geschichte der Analysis, H.N. Jahnke (Hrsg.), Spektrum-Verlag. (Ein interessanter historischer Artikel, der Wege und Irrwege zum funktionierenden Integralbegriff darstellt.)

[L] Lang: Real Analysis, Addison-Wesley 1983. (In Kapitel 11, The General Integral, können Sie nachlesen, wie man das Lebesgue-Integral direkt durch Vervollständigung aus dem Integral für Stufenfunktionen gewinnen kann. Man setzt also $\int f = \int f_k$, wobei f_k eine Cauchyfolge von Stufenfunktionen mit Grenzwert f punktweise fast überall ist. Man braucht dann nicht auf die Zerlegung $f = f_+ - f_-$ zurückzugreifen. Dieser Zugang ist abstrakt, aber treffend.)

[R] Rudin: Principles of Mathematical Analysis, sowie Real and Complex Analysis

Zu speziellen Themen:

[GP] Guillemin, Pollack: Differential topology

EINLEITUNG

Die Integrationstheorie bietet reichlich Stoff für eine zweistündige Vorlesung: Es wird hier einerseits das Lebesgue-Integral eingeführt und andererseits werden Oberflächenintegrale und Integralsätze behandelt.

Im ersten Kapitel wird zunächst das Integral über stetige Funktionen mit kompaktem Träger aus dem zweiten Semester wiederholt. Es folgt ein Schnelldurchgang durch das Lebesgue-Integral. Die Beweise sind sämtlich nicht schwer, was man als Beleg dafür verstehen kann, dass Lebesgues Zugang der richtige ist. Ich habe einige Argumente nur skizziert, aber lediglich der Existenzbeweis für des Lebesgue-Maßes auf dem $\mathbb{R}^n$ bleibt als eine größere Lücke offen.

Dagegen wird L^1 (und auch L^p) eingeführt und die Vollständigkeit dieses Raums gezeigt, die Dichtheit der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger darin immerhin skizziert. Der Satz von Fubini kann damit im wesentlichen aus der Version für stetige Funktionen gefolgert werden. Genauso kann man die Transformationsformel übertragen; allerdings bleibt hier eine Lücke, weil ich den Beweis für stetige Funktionen mit kompaktem Träger nicht wirklich geführt hatte. Tatsächlich kenne ich keinen Beweis der Transformationsformel, der sowohl instruktiv wie gut präsentierbar ist.

Im zweiten Kapitel geht es um Integralsätze, also Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf mehrere Dimensionen. Um den Gaußschen Integralsatz als Hauptergebnis zu formulieren, muss zuerst das Oberflächenintegral eingeführt werden.

Diese Vorlesung ist die Bearbeitung einer im Wintersemester 03/04 gehaltenen Veranstaltung. Neben der angegebenen Literatur habe ich auch Skripten aus den Vorjahren benutzt, und zwar von meinen Kollegen Neeb, Roch und Kümmerer.

Textteile, die in kleiner Type erscheinen, habe ich nicht in der Vorlesung gehalten.

Ich danke den Hörern der Vorlesung, die mir Korrekturen und Anmerkungen mitgeteilt haben.

Darmstadt, August 08

Teil 1. Integration in $\mathbb{R}^n$

`1. Vorlesung, Montag 31.3.08`

Zwei Fragen stellen sich beim Integrieren:

1. Für welche Funktionen ist das Integral definiert?
2. Wie rechnet man das Integral aus?

Im Eindimensionalen haben wir die folgenden Antworten gegeben:
1. Riemann-integrable Funktionen sind solche, die sich gut genug durch Treppenfunktionen approximieren lassen; stetige Funktionen gehören dazu.
2. Man benutzt den Hauptsatz und rät Stammfunktionen.

Im Mehrdimensionalen stellen wir die bereits von Analysis 2 bekannte Antwort im ersten Kapitel dar. Um die erste Frage zu beantworten, werden werden wir eine große Klasse von integrierbaren Funktionen angeben, die sogenannten Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Dafür müssen wir einen gewissen Aufwand treiben.

1. Ein einfacher Integralbegriff (Wiederholung)

1.1. **Iterierte Riemann-Integrale.** Die Antwort auf die zweite Frage lautet: Die mehrdimensionale Integration wird auf eindimensionale Integration zurückgeführt. Wir hatten dies bereits am Ende von Analysis 2 dargestellt.

Wir können das bekannte eindimensionale Riemann-Integral benutzen, um mehrdimensionale Integrale zu berechnen. Der natürliche Definitionsbereich sind Quader:

Definition. (i) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *Quader [rectangular box]*. Sein Volumen ist $\mathrm{vol}([a, b]) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.
(ii) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das *(iterierte Riemann-)Integral* von f erklärt durch

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx := \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n. \tag{1}$$

Interpretation. 1. Man kann (1) deuten als den $(n+1)$-dimensionalen Inhalt des Graphen $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
2. Versteht man f als Massendichte eines Quaders $[a, b]$, so ist $\int_{[a,b]} f(x)\, dx$ seine Masse.
3. Setzt man $|[a, b]| := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$, so ist $\frac{1}{\mathrm{vol}([a,b])} \int_{[a,b]} f(x)\, dx$ der Mittelwert von f über $[a, b]$.

Beispiel.

$$\int_{[0,1]^2} x^2 + y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + yx \right]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3} + y\,dy = \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

Es ist zu zeigen, dass (1) wohldefiniert ist. Dazu iteriert man die folgende Behauptung:
• Das Ergebnis der innersten Integration von (1) ist eine stetige Funktion der Parameter $(x_2, \dots, x_n)$ und kann daher erneut integriert werden.
Zum Beweis benutzt man die gleichmäßige Stetigkeit des Integranden, siehe Analysis 2.

Einen weiteren wichtigen Punkt formulieren wir als Satz:

Satz 1 (Fubini)**.** (i) *Ist* $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist das Doppelintegral unabhängig von der Integrationsreihenfolge,*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(ii) *Der Wert des n-fachen Integrals* (1) *ist unabhängig von der gewählten Integrationsreihenfolge.*

Den Beweis von (i) liefert der (eindimensionale) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, zusammen mit der Tatsache, dass man unter dem Integral differenzieren darf, siehe wiederum Analysis 2. Durch Induktion folgt daraus (ii).

1.2. **Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger.** Wir erinnern daran, dass der *Abschluss [closure]* einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$\overline{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ (x_k) \in X \text{ with } x_k \to x\} = \{x \in \mathbb{R}^n : B_\varepsilon(x) \cap X \neq \emptyset\ \forall \varepsilon > 0\}$$

Es ist $\overline{X}$ auch der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die X enthalten. Siehe Analysis 2.

Der *Träger [support]* einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^n.$$

Beispiele. 1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) := \max\{0, x^2(1-x^2)\}$ hat den Träger $\operatorname{supp} f = [-1,1]$.
2. $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und 0 sonst hat $\operatorname{supp} \chi_Q = \mathbb{R}$.

Definition. (i) Eine Funktion $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f$ kompakt heißt *stetige Funktion mit kompaktem Träger [continuous function with compact support]*. Wir schreiben

$$C_c^0(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} : \operatorname{supp} f \subset U \text{ kompakt }\}.$$

(*ii*) Für $f \in C_c^0(U)$ erklären wir das Integral durch

$$\int_U f(x)\,dx := \int_{[a,b]} f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt $U \subset\subset [a,b]$.

Auch wenn die Integration stetiger Funktionen mit kompaktem Träger recht speziell ist, kann man diese Funktionen doch dazu benutzen, um beliebige integrierbare Funktionen damit ungleichmäßig zu approximieren.

Aus den entsprechenden Eigenschaften des eindimensionalen Riemann-Integrals erhält man:

Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C_c^0(U)$. Das Integral hat die folgenden Eigenschaften:*
(*i*) *$f \mapsto \int_U f(x)\,dx$ ist linear.*
(*ii*) *Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_U f(x)\,dx \leq \int_U g(x)$.*
(*iii*) *Translationsinvarianz: $\int_{U+a} f(x-a)\,dx = \int_U f(x)\,dx$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$.*

Man kann sogar zeigen, dass diese Eigenschaften das Integral bestimmen bis auf Multiplikation mit einer Konstanten (Beweis: [F], S.4-11).

Die wichtigste Eigenschaft von Integralen ist ihr Verhalten unter Variablentransformation, im Eindimensionalen also die Substitutionsformel.

Satz 3 (Transformationsformel *[Change of variables formula]*)**.** *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für jedes $f \in C_c^0(V)$*

$$\int_U f\big(\varphi(x)\big)\,|\det d\varphi_x|\,dx = \int_V f(y)\,dy.$$

Wir hatten diese Behauptung in Analysis 2 nur für den Spezialfall von linearen Abbildungen φ bewiesen. In diesem Fall kann man sie dadurch gewinnen, dass man φ als Produkt von Elementarmatrizen darstellt, und die eindimensionale Substitutionsformel benutzt. Im allgemeinen, nichtlinearen Fall stellt man φ in der Form "affin plus Fehler" dar, und zeigt, dass man die entstehenden Fehlerterme beliebig klein machen kann.

Ich stelle abschließend noch die Probleme dieses Integralbegriffs dar.

Man möchte gern das Integral von beliebigen stetigen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ für U offen bestimmen. Dazu wählt man einen Quader $[a,b]$, der U kompakt enthält, und erklärt das Integral wieder wie in (1), indem man f durch 0 auf die Punkte von $[a,b] \setminus U$ fortsetzt. An der Randpunkten ∂U wird f aber im allgemeinen unstetig sein. In vielen praktischen Fällen wirft das kein Problem auf, jedoch stellt sich für einen sorgfältigen Mathematiker folgendes Problem:

• Wie gut muss die offene Menge U sein, damit man trotz der Unstetigkeitsstellen noch integrieren kann? Die Charakterisierung solcher Mengen ist möglich, aber nicht elegant.

Oft möchte man über unbeschränkte Funktionen oder auf unbeschränkten Gebieten integrieren ("uneigentliche Integrale"). Dadurch stellen sich weitere Fragen:
• Welche Sorte von "Unendlichkeitsstellen" und von nicht beschränkten Gebieten kann man zulassen?

Mit dem mehrdimensionales Riemann-Integral kann diese Problem durchaus behandeln (siehe z.B. [H]). Wir werden jedoch das Lebesgue-Integral einführen, das ohne besonderen Mehraufwand beide Probleme direkt und elegant behandelt.

2. MASSE

Wir werden den folgenden systematischer Weg nehmen, um das Integrationsproblem anzugehen: Wir untersuchen,
1. welchen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ man einen sinnvollen Inhalt zuschreiben kann,
2. für welche Funktionen auf solchen Mengen man ein Integral definieren kann.
Natürlich ist die zweite Aufgabe allgemeiner, denn der Inhalt einer Menge A läßt sich formal als Integral schreiben, $\text{Inhalt}(A) = \int_A 1\,dx$.

Borel und Lebesgue haben folgende Strategie zur Lösung des Inhaltsproblems für Mengen vorgeschlagen. Von Quadern kennen wir den Inhalt; wir dehnen diesen Inhaltsbegriff auf ein möglichst großes System von sogenannten *messbaren* Teilmengen aus.

Wie wir sehen werden, ist das Ergebnis weder offensichtlich noch explizit. Aus diesem Grund war dieser Ansatz schwierig, und die vorgeschlagene Lösung war ein großer Fortschritt zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Tatsächlich hat man bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts nur durch spezielle Vorschriften gegebene Mengen (oder Funktionen) betrachtet. Die allgemeine, axiomatische Betrachtung von sogenannten *willkürlichen* Mengen oder Funktionen entwickelte sich nur langsam. Beispielsweise schrieb Hermite in einem Brief "Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont point de dérivées", er wollte sich also mit Abscheu von der Plage von Funktionen ganz ohne Ableitungen abwenden – entsprechend lehnte er die Veröffentlichung einer Ankündigung von Lebesgue ab. Lesen Sie in Elstrodt [E], S. 1-6 (+S.158/59) nach, wie das Lebesgue-Integral "erfunden" wurde.

Kann man einfach jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ einen sinnvollen Inhalt zuschreiben? Dies ist unmöglich, wie das 1905 von Vitali gefundene Beispiel einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ zeigt, die keinen vernünftigen Inhalt haben kann (siehe Übungen).

Besonders zugespitzt erkennt man die Unmöglichkeit eines Inhaltsbegriffs für beliebige Mengen aus dem *Banach-Tarski-Paradox* (1924). Man kann den dreidimensionalen Einheitsball $B = B_1(0)$ in endlich viele Teilmengen (disjunkt) so zerlegen, dass die auf andere Weise zusammengesetzten Mengen zwei verschiedene Einheitsbälle ergeben. Dazu muss nur jede Menge geeignet rotiert und verschoben werden. Bereits fünf solcher fraktalen Teilmengen reichen aus. Siehe z.B. `http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski`. Ist der Inhalt also bewegungsinvariant und additiv, so kann man den betrachteten Teilmengen keinen Inhalt zuschreiben.

Zur Konstruktion der beiden Beispiele benötigt man das Auswahlaxiom.

`2. Vorlesung, Mittwoch 2.4.08` ______________________________

2.1. **σ-Algebren.** Eine plausible Grundidee zur Bestimmung des Inhalts von "guten" Mengen ist es, sie auszuschöpfen. Beispielsweise kann man den Inhalt eines ebenen Gebiets empirisch dadurch bestimmen, dass man das Gebiet mit einem Quadratgitternetz überdeckt, und zuerst die Fläche der im Gebiet enthaltenen Einheitsquadrate berechnet, dann in der verbleibenden Menge die Fläche aller im Gebiet enthaltenen Quadrate der Kantenlänge 1/2 hinzunimmt; dann ebenso mit Kantenlänge 1/4, 1/8 ... Im Normalfall erhält man auf diese Weise eine abzählbare Folge von kleiner werdenden Quadraten. Ihr Gesamtinhalt ist eine unendliche Summe.

Wollen wir aber abzählbare Vereinigungen von Mengen zur Inhaltsbestimmung heranziehen, so müssen wird bei der Inhaltsdefinition Mengensysteme betrachten, die bezüglich der Bildung von abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen sind:

Definition. Sei X eine Menge. Ein System $\Sigma = \Sigma(X)$ von Teilmengen von X heißt *σ-Algebra*, falls gilt:
(*i*) $X \in \Sigma$.
(*ii*) [Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung]: Ist $A \in \Sigma$, so auch $A^c := X \setminus A \in \Sigma$.
(*iii*) [Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Vereinigungen]: Falls $A_k \in \Sigma$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
Das System (X, Σ) heißt *messbarer Raum* und $A \in \Sigma$ *messbare Menge [measurable space/set]*.

Weitere Eigenschaften folgen sofort:

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. σ-Algebren sind abgeschlossen bezüglich abzählbarer Durchschnitte:

$$(A_k) \in \Sigma \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad A_k^c \in \Sigma \ \ \forall k \quad \overset{(iii)}{\Rightarrow} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^c = \Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big)^c \in \Sigma \quad \overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma.$$

3. Es ist $B \setminus A = B \cap A^c$. Aus 2. folgt: $A, B \in \Sigma \Rightarrow B \setminus A \in \Sigma$.

Bemerkung. Der Begriff *Algebra* bezieht sich auf folgende Operationen:
• Addition ist die *symmetrische Differenz* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Das neutrale Element ist $\emptyset$, was ist das Negative?
• Multiplikation ist Durchschnittsbildung.
Nach 2. und 3. sind Addition und Multiplikation durch Vereinigung und Komplementbildung darstellbar, so dass eine σ-Algebra tatsächlich abgeschlossen bezüglich dieser Verknüpfungen ist. Der Begriff Algebra bezieht sich auf die Darstellung als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, siehe [E], S.11/12. Der Buchstabe σ bezeichnet oft abzählbar Unendliches, hier die Additivität.

Beispiele. 1. Für X beliebig sind σ-Algebren: $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, sowie die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ (das ist die Menge sämtlicher Teilmengen von X).
2. Die Menge $\{A \subset \mathbb{Z} : x \in A \Rightarrow -x \in A\}$ ist σ-Algebra.
3. Die Menge $\{A \subset \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich }\}$ ist keine σ-Algebra. Warum?
4. Ist $E \in \Sigma$, so ist auch E selbst eine Σ-Algebra Σ_E (warum?).

2.2. **Maße.** Die wichtigste Forderung an einen Inhalt ist, dass er additiv auf disjunkten Vereinigungen ist. Wir fordern dies sogar für abzählbar unendliche Vereinigungen:

Definition. Sei (X, Σ) ein messbarer Raum. Ein *Maß [measure]* auf (X, Σ) ist eine Funktion $\mu \colon \Sigma \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) μ ist *σ–additiv*, d.h. ist $A_k \in \Sigma$ für $k \in \mathbb{N}$, und $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{2}$$

Wir nennen (X, Σ, μ) einen *Maßraum [measure space]*.

Dabei sei $[0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$ und es mögen folgende Rechenregeln für ∞ gelten:
• $x + \infty = \infty + x = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
• $\pm x \cdot \infty = \infty \pm x = \pm\infty$ für $x > 0$ und (sogar!) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.
• $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
• Wir schreiben $\lim_{k \to \infty} x_k = \infty$, wenn x_k bestimmt gegen ∞ divergiert.

Beispiele. 1. *Zählmaß*: Sei X endlich. Durch $\mu(A) := \#A$ (Anzahl der Elemente) für $A \subset X$ wird $\big(X, \mathcal{P}(X)\big)$ zum Maßraum.
2. *Punkt- oder Dirac-Maß*: Sei (X, Σ) gegeben, und $x \in X$ fest. Dann setzen wir

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

3. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist ein Maßraum (X, Σ, μ) mit $\mu(X) = 1$.
• Für $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ gibt das Maß $\mu(A) := \frac{1}{6}\#A$ die Wahrscheinlichkeit an, bei einem Würfelwurf ein Ergebnis in $A \subset X$ zu erzielen.
• Für $X := \mathbb{R}$ und geeignete $A \subset X$ kann $\mu(A) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_A e^{-t^2}\, dt$ die Wahrscheinlichkeit angeben, ein Messergebnis in A zu erzielen. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaßwird auch als *Normalverteilung* bezeichnet. Natürlich müssen Σ und $\int$ später noch definiert werden.
4. Sei (X, Σ, μ) Maßraum. Auf der σ-Algebra Σ_E der messbaren Teilmengen von E ergibt die Einschränkung $\mu|_E$ wieder einen Maßraum, $(E, \Sigma_E, \mu|_E)$.

Satz 4. *Jedes Maß μ auf (X, Σ) hat die folgenden Eigenschaften:*
(i) endl. Additivität*: Sind $A_1, \ldots, A_k \in \Sigma$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k)$.*
(ii) Monotonie*: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*
(iii) Ausschöpfung*: Für jede Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ in Σ gilt $\mu\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.*

Beweis. (i) Das ist die σ-Additivität für $A_1, \ldots, A_k, \emptyset, \emptyset, \ldots$.

(ii) Aus (i) folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(iii) Um die Ausschöpfung als disjunkte Vereinigung zu schreiben, setzen wir $A_0 := \emptyset$ und $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Aus $A_k = \bigcup_{j=1}^k A_j = \bigcup_{j=1}^k (A_j \setminus A_{j-1}) = \bigcup_{j=1}^k B_j$ folgt wie gewünscht

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

□

2.3. **Borel-Mengen.** Gibt es nun ein Maß für eine möglichst große σ-Algebra von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$? Wir wollen das offensichtliche Maß von Quadern benutzen, um für allgemeinere Mengen Maße zu definieren. Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine Übung:

Lemma 5. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{A}$ eine Familie von σ–Algebren über X, so ist ihr Durchschnitt*

$$\bigcap \mathcal{A} := \{A \subset X : A \in \Sigma \textit{ für alle } \Sigma \in \mathcal{A}\}$$

wieder eine σ–Algebra über X.

Es ist allerdings gar nicht so einfach, eine konkrete Beschreibung derjenigen Mengen zu geben, die in $\bigcap \mathcal{A}$ liegen.

Aus dem Lemma folgt, dass es für jedes nichtleere System von Mengen $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ genau eine kleinste σ-Algebra über X gibt, die $\mathcal{E}$ umfasst. Um das einzusehen, betrachten wir die Menge $\mathcal{A}$ aller σ-Algebren über X, die $\mathcal{E}$ umfassen. Da $\mathcal{E}$ in der σ-Algebra $\mathcal{P}(X)$ enthalten ist, ist $\mathcal{A}$ sicher nicht leer. Nach dem Lemma ist aber $\bigcap \mathcal{A}$ wieder eine σ-Algebra. Aber $\bigcap \mathcal{A}$ enthält $\mathcal{E}$, und es ist die kleinste solche σ–Algebra über X. Wir nennen diese σ-Algebra die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.*

Wir wenden diese Konstruktion nun an auf die Menge aller *halboffenen Quader*

$$\mathcal{Q} = \{(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n : a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\} :$$

Definition. Die *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die von den Quadern $\mathcal{Q}$ erzeugte σ-Algebra.

Die *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}$ enthält also alle halboffenen Quader und ist sogar die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft. Insbesondere enthält $\mathcal{B}$ Komplemente und abzählbare Vereinigungen von halboffenen Quadern. Natürlich würde man gern wissen, welche Mengen "genau" in $\mathcal{B}$ liegen. Immerhin können wir feststellen:

Satz 6. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *enthält alle offenen und abgeschlossenen Mengen.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede offene Menge U eine abzählbare Vereinigung halboffene Quader ist. Dazu werden wir allein Würfel benutzen. Um abzählbar viele Würfel zu erhalten, lassen wir nur Würfel mit rationalen Eckpunkten zu, d.h. Würfel mit rationalem Mittelpunkt und rationaler Kantenlänge.

Weil U offen ist, gibt es eine offene Umgebung von x bezüglich der Maximumsnorm, die in U liegt, also ein offener Würfel. Nach eventueller Verkleinerung der Kantenlänge erhalten wir sogar einen halboffenen Würfel W mit $x \in W \subset U$, dessen Kantenlänge $2\ell > 0$ rational sei. Wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ gibt es $q \in \mathbb{Q}^n$ mit $\|q - x\|_\infty < \frac{\ell}{2}$. Der rationale halboffene Würfel W' der Kantenlänge $\frac{\ell}{2}$ um q erfüllt nun das Verlangte: $x \in W' \subset W \subset U$.

Da abgeschlossene Mengen Komplemente offener Mengen sind, liegen auch diese in $\mathcal{B}$. □

`3. Vorlesung, Mittwoch 9.4.08` ______________________________

Im Falle eines allgemeinen metrischen oder topologischen Raumes X definiert man die σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ als die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Der Satz zeigt, dass diese Definition für den Fall $X = \mathbb{R}^n$ äquivalent zu der von uns gegebenen Definition ist.

2.4. **Das Lebesgue-Maß von Borel-Mengen.** Wir führen nun durch schrittweise Erweiterung ein Maß auf folgenden Mengentypen ein:
1. Maß von Quadern
2. Maß von offenen und kompakten Mengen
3. Maß von Borel-Mengen
4. Maß auf Lebesgue-messbaren Mengen (im nächsten Abschnitt)

Im ersten Schritt nehmen wir als Maß von Quadern ihr Volumen:

$$\lambda\big((a,b]\big) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \qquad \text{für alle Quader } (a,b] = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{Q}.$$

Als zweiten Schritt setzen wir nun das Maß durch Ausschöpfung mit Quadern auf offene Mengen fort, und danach durch Komplementbildung auf kompakte Mengen:

Satz 7. (*i*) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist wohldefiniert:*

$$\lambda(U) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda\big((a_k, b_k]\big) \in [0,\infty], \qquad \textit{falls} \quad U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k, b_k] \quad \textit{disjunkt.}$$

(*ii*) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist wohldefiniert:*

$$\lambda(K) := \lambda(U_0) - \lambda(U_0 \setminus K),$$

wobei U_0 eine offene Menge mit $K \subset U_0$ ist, und die rechte Seite durch (*i*) *bestimmt ist.*

Der Beweis besteht darin zu zeigen, dass die Werte $\lambda(U)$ bzw. $\lambda(K)$ unabhängig von den gewählten Zerlegungen sind, siehe [BF, 15.1].

Diese Definitionen gestatten es uns, für eine beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ein *inneres Maß* λ_* und ein *äußeres Maß* λ^* zu definieren durch

$$\lambda_*(A) := \sup\{\lambda(K) : A \supset K \text{ kompakt}\} \quad \text{und} \quad \lambda^*(A) := \inf\{\lambda(U) : A \subset U \text{ offen}\}.$$

Für allgemeine Mengen brauchen diese Maße nicht übereinzustimmen, jedoch tun sie es für Borel-Mengen:

Satz 8. *Für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lambda_*(B) = \lambda^*(B)$.*

Zum Beweis des Satzes zeigt man, dass alle Mengen $B \in \mathcal{B}$, für die der Satz gilt, eine σ-Algebra bilden; natürlich enthält diese σ-Algebra die halboffenen Quader. Wir lassen diesen Beweis aus, auch wenn dies der entscheidende Existenzsatz ist, durch den die Maßtheorie für uns erst Bedeutung erlangt. Die Details finden Sie z.B. in [BF], 15.1-15.3.

Wir können daher als dritten Schritt das Maß auf die Borel-Mengen fortsetzen:

$$\lambda(B) := \lambda_*(B) = \lambda^*(B) \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

Bemerkungen. 1. Aus der Eigenschaft (3) erhalten wir: Für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(B) < \infty$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existieren eine offene Menge U und eine kompakte Menge K mit $K \subset B \subset U$, so dass $\lambda(U) - \varepsilon < \lambda(B) < \lambda(K) + \varepsilon$.

2. *Eindeutigkeit*: Es gibt keine andere Fortsetzung des Volumens von Quadern zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als (3).

3. *Bewegungsinvarianz*: Weil das Maß auf den Quadern translationsinvariant ist, hat auch λ diese Eigenschaft (Übung). Das Maß λ ist sogar O_n-invariant.

2.5. **Nullmengen und Lebesgue-meßbare Mengen.**

Definition. Sei (X, Σ, μ) Maßraum und $N \in \Sigma$. Dann heißt N eine *μ-Nullmenge [set of measure zero]*, falls $\mu(N) = 0$.

Bemerkungen. 1. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen. Dies folgt aus der σ-Additivität für die offenen Obermengen oder aus 2.

2. Eine messbare Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ^*-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge offener Quader $Q_k = (a, b)$ (nicht notwendig disjunkt) gibt mit

$$N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) < \varepsilon.$$

Die Richtung "$\Rightarrow$" ist klar, die Umkehrung folgt daraus, dass offene Mengen durch abzählbar viele Q_k ausgeschöpft werden können.

3. Wenn eine beliebige Menge $N \subset X$ eine μ^*-Nullmenge ist, so gilt natürlich auch $\mu_*(N) = 0$.

Beispiele. 1. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist λ-Nullmenge, denn er ist in Quadern beliebig kleinen Inhalts enthalten. Andererseits ist $x \in \mathbb{R}$ nicht Nullmenge für das Punktmaß μ_x.

2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ sind als abzählbare Vereinigungen von Punkten λ-Nullmengen in $\mathbb{R}$.

3. Mengen "niederer Dimension" sind λ^*-Nullmengen, wie z.B. $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Tatsächlich kann man hier die Folge von Rechtecken $A_k := (k-1, k+1) \times (-\frac{\varepsilon}{2^k}, \frac{\varepsilon}{2^k})$, $k \in \mathbb{N}$ für $\varepsilon \searrow 0$ benutzen: $\lambda(A_k) = \frac{4\varepsilon}{2^k}$ also $\lambda(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \frac{4\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} = 8\varepsilon \to 0$.

Wir können nun Lebesgue-meßbare Mengen definieren, indem wir Borel-Mengen mit Nullmengen vereinigen. Beachten Sie, dass das Resultat nicht unbedingt eine Borel-Menge sein muss.

Definition. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-messbar*, wenn $A = B \cup N$ ist, wobei $B \in \mathcal{B}$ und N eine λ^*-Nullmenge ist. Das *Lebesgue-Maß* von A wird erklärt durch $\lambda(A) := \lambda(B)$.

Die Familie der Lebesgue-messbaren Mengen bildet eine σ-Algebra (Übung).

Allgemein heißt ein Maß μ *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer messbaren μ-Nullmenge N wieder eine messbare Menge ist. Unsere Definition macht das Lebesgue-Maß zu einem vollständigen Maß. Genauso kann man ein beliebiges Maß vervollständigen (Fortsetzungssatz von Carathéodory).

Wichtig ist noch folgende Bezeichnung: Eine Eigenschaft gilt *μ-fast überall [almost everywhere]* auf einem Maßraum (X, Σ, μ), wenn sie außerhalb einer geeigneten μ-Nullmenge zutrifft.

Beispiele. 1. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stimmt λ-fast überall mit der 0-Funktion überein.

2. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ hat fast überall sämtliche Komponenten von 0 verschieden.

3. Das Lebesgue-Integral

3.1. **Riemann- und Lebesgue-Integral: Die Grundideen.** Für das Riemann-Integral unterteilt man den Definitionsbereich genügend fein. Bei guten Funktionen unterscheiden sich Supremum und Infimum über die kleinen Teilbereiche nur wenig, und daher kann man jedes der beiden nehmen, um das Integral zu approximieren.

Hat man allerdings häßliche Funktionen, wie $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, so versagt diese Idee: Das Oberintegral ist 1, das Unterintegral 0. Die Funktion hat aber nur auf einer Nullmenge den Wert 1, während sie 0 fast überall ist: Das Integral sollte also verschwinden! Für diese (Lebesguesche) Sichtweise haben wir die *Werte* der Funktion betrachtet und sie mit dem *Maß ihrer Urbilder* multipliziert. Entsprechend kann man als Grundideen einander gegenüberstellen:

- *Riemann-Integral*: Unterteile Definitionsbereich, und summiere über Definitionsbereichsgebiete mal (approximierenden) Funktionswert.
- *Lebesgue-Integral*: Unterteile Wertebereich, und summiere (approximierende) Werte mal dem Maß ihres Urbilds.

Auch bei guten Funktionen ist Lebesgues Idee von Vorteil. Eine äquidistante Unterteilung des Wertebereiches führt zu einer besseren Approximation des Integrals als eine äquidistante Unterteilung des Definitionsbereichs. Lebesgue selber hat seine Grundidee am Zählen von Münzgeld veranschaulicht: Nach Riemann zählt man die Münzen in der gegebenen Reihenfolge eine nach der anderen zusammen, während man sie nach Lebesgue zuerst der Größe nach sortiert und dann den Wert mit der gefundenen Anzahl multipliziert.

3.2. **Messbare Funktionen.** Wir beschreiben nun diejenigen Funktionen, die wir später integrieren können. Wir benötigen die erweiterte reelle Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Die abgeschlossenen Intervalle von $\overline{\mathbb{R}}$ sind alle Intervalle $[a, b]$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sieht schnell, dass

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \big\{A \cup B : A \subset \{-\infty, \infty\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\}$$

eine σ-Algebra ist.

Um der Idee Lebesgues entsprechend zu integrieren, indem man Funktionswerte mit dem Maß ihres Urbilds multipliziert und aufsummiert, brauchen wir, dass diese Urbilder messbar sind. Statt für Bild-Intervalle fordern wir dies gleich für die ganze σ-Algebra des Bildes $\overline{\mathbb{R}}$:

Definition. Sei (X, Σ) messbarer Raum. Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar*, wenn gilt $f^{-1}(A) \in \Sigma$ für jede messbare Menge $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Beispiele. 1. Jede konstante Funktion ist messbar ($\emptyset$, X sind messbar).
2. $A \subset X$ messbar $\iff$ $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ messbar (zu prüfen ist: $\emptyset, A, X \setminus A, X$ sind messbar).

Um zu überprüfen, ob eine Funktion messbar ist, muss man nicht die Urbilder sämtlicher messbarer Mengen betrachten:

Satz 9. *Es sei (X, Σ) ein messbarer Raum. Jede der folgenden Eigenschaften ist äquivalent zur Messbarkeit einer Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$:*
(i) $f^{-1}\big((a,b)\big), f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \Sigma$ *für alle* $a < b \in \mathbb{R}$,
(ii) $f^{-1}\big([a,b]\big) \in \Sigma$ *für alle* $a \leq b \in \overline{\mathbb{R}}$,
(iii) $f^{-1}\big([a,\infty]\big) \in \Sigma$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$,
(iv) $f^{-1}\big((a,\infty]\big) \in \Sigma$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

`4. Vorlesung, Mittwoch 16.4.08` ____

Beweis. Ist f messbar, so folgt offenbar (i) bis (iv).

Beweisen wir nun die umgekehrte Richtung, z.B. für (iv).

1. Wir nehmen die durch die Intervalle $\{(a,\infty], a \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Σ-Algebra und zeigen, dass sie alle halboffenen Intervalle (Quader!) $\{(a,b] : a < b \in \mathbb{R}\}$, sowie zusätzlich $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ enthält:

$$(a,b] = [-\infty, b] \cap (a,\infty] = (b,\infty]^c \cap (a,\infty],$$
$$\{\infty\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (k,\infty], \qquad \{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (-k,\infty]$$

2. Wir behaupten, dass das System von Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{M} := \big\{A \subset \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(A) \in \Sigma\big\}$$

stets eine σ-Algebra von $\overline{\mathbb{R}}$ ist. In der Tat,
- $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}$,
- $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \ni \big(f^{-1}(A)\big)^c = \{x : f(x) \notin A\} = f^{-1}\big(A^c\big) \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{M}$,
- $A_k \in \mathcal{M}$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}\big(\bigcup A_k\big) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup A_k \in \mathcal{M}$.

Die σ-Algebra $\mathcal{M}$ enthält nach 1. aber die Erzeuger der Borel-σ-Algebra von $\overline{\mathbb{R}}$. Dies zeigt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{M}$. Also ist für alle Mengen aus $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ das Urbild messbar, was zu zeigen war.

Durch Abwandelung von Schritt 1. zeigt man (i) bis (iii) (Übungen?). □

Beispiele. 1. Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar. Nach Satz 9(i) reicht es festzustellen, dass $f^{-1}(a,b) \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist. Aus Analysis 2 wissen wir, dass das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist. Nach Satz 6 liegen die offenen Mengen aber in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, und damit ist f messbar.
2. Jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar (Übung).

Satz 10. *Es sei* (X, Σ) *messbarer Raum,* $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar und* $c \in \mathbb{R}$.
(*i*) *Dann sind auch* cf, $|f|$, $f_+ := \max\{f, 0\}$ *und* $f_- := -\min\{f, 0\}$ *messbar.*
(*ii*) *Sind insbesondere* $f, g\colon X \to [0, \infty]$, *so ist* $f - g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar.*
(*iii*) *Die Funktionen* $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *sind messbar.*

Beweis. (*i*) Für $c = 0$ ist die Messbarkeit von cf klar. Für $c \neq 0$ reicht es nach Satz 9(*iv*) die Messbarkeit der folgenden Mengen für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ zu zeigen:

$$(cf)^{-1}\big((a, \infty]\big) = \{x \in X : cf(x) > a\} = \begin{cases} f^{-1}\big((\frac{a}{c}, \infty]\big) & \text{für } c > 0, \\ f^{-1}\big([-\infty, \frac{a}{c})\big) & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

Die Mengen rechts liegen nach Voraussetzung in Σ.

Für $|f|$ und f_+ können wir ähnlich argumentieren:

$$|f|^{-1}\big((a, \infty]\big) = \begin{cases} X & \text{für } a < 0, \\ f^{-1}\big((a, \infty]\big) \cup f^{-1}\big([-\infty, -a)\big) & \text{für } a \geq 0 \end{cases}$$

$$(f_+)^{-1}\big((a, \infty]\big) = \begin{cases} X & \text{für } a < 0, \\ f^{-1}\big((a, \infty]\big) & \text{für } a \geq 0 \end{cases}$$

Wiederum liegen nach Voraussetzung die Mengen auf der rechten Seite in Σ. Also folgt die Messbarkeit von $|f|, f_+$ aus Satz 9(*iv*).

(*ii*) Kann man wie (*i*) beweisen.

(*iii*) Wir lassen den Beweis aus. Schauen Sie in der Literatur nach, so werden Sie feststellen, dass der Beweis einfach wird, wenn man den Begriff der meßbaren Funktion auf Funktionen zwischen zwei beliebigen Maßräumen erweitert. □

Als eine Konsequenz halten wir fest, dass die Menge aller messbaren Funktionen auf X einen Vektorraum bildet. Ganz wichtig für das Lebesgue-Integral wir sein, dass die Messbarkeit stabil gegenüber Grenzprozessen ist.

Satz 11. *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *sei* $f_k\colon (X, \Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen messbar:*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k \to \infty} f_k, \quad \liminf_{k \to \infty} f_k$$

Dabei ist der *limes superior* einer Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$\limsup_{k \to \infty} a_k := \inf_{k \in \mathbb{N}} \Big(\underbrace{\sup\{a_j : j \geq k\}}_{\text{fallend in } k} \Big) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup\{a_j : j \geq k\} \big) \quad \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{4}$$

entsprechend *limes inferior* $\liminf$. Es gilt $\liminf a_k \leq \limsup a_k$. Wenn aber a_k konvergiert oder bestimmt divergiert, gilt $\lim a_k = \liminf a_k = \limsup a_k$ (warum?).

Beweis. Sei $f := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Es gilt $f^{-1}\big((a,\infty]\big) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}\big((a,\infty]\big)$, denn

$$x \in f^{-1}\big((a,\infty]\big) \quad\Leftrightarrow\quad \sup f_k(x) > a \quad\Leftrightarrow\quad \exists k : f_k(x) > a \quad\Leftrightarrow\quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}\big((a,\infty]\big).$$

Aus der Messbarkeit der f_k folgt daher die Messbarkeit von f nach Satz 9(*iv*). Ebenso für $\inf f_k$.

Wegen (4) folgt die Messbarkeit von $\limsup f_k$ in zwei Schritten, ebenso für $\liminf f_k$. □

Messbarkeit bleibt nicht etwa nur unter gleichmäßiger, sondern sogar unter punktweiser Konvergenz erhalten:

Korollar 12. *Ist (f_k) Folge messbarer Funktionen $f_k\colon (X,\Sigma) \to \overline{\mathbb{R}}$ und existiert der Grenzwert $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in X$, so ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar.*

Dies folgt wegen $f = \limsup\, f_k$ sofort aus dem Satz.

3.3. **Stufenfunktionen.** Um messbare Funktionen zu integrieren, befassen wir uns zuerst mit speziellen Funktionen, für die Lebesgues Idee zur Integralberechnung auf die Bildung einer endlichen Summe hinausläuft.

Definition. Es sei (X,Σ,μ) Maßraum. Eine Funktion $s\colon (X,\Sigma) \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion [step function]* (oder *einfache Funktion [simple function]*), wenn s messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

Mit der *charakteristischen Funktion* $\chi_M\colon X \to \mathbb{R}$, die 1 ist für $x \in M \subset X$ und 0 sonst, können wir jede Stufenfunktion schreiben als eine Linearkombination

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \chi_{A_j}(x);$$

dabei ist $s(X) = \{a_1,\dots,a_k\}$ und die $A_j := s^{-1}(a_j) \subset X$ bilden disjunkte messbare Mengen.

Stufenfunktionen kann man zur Approximation messbarer Funktionen benutzen, wobei man im nicht-negativen Fall sogar monton wachsend approximieren kann:

Satz 13. *Es sei (X,Σ,μ) Maßraum, und $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen $s_k\colon X \to [0,\infty)$, so dass*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Konvergenz $s_k \to f$ ist gleichmäßig auf der Teilmenge $\{x \in X : f(x) \le c\}$ für beliebiges $c \in [0, \infty)$.

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen den Wertebereich zwischen 0 und k in $k2^k$ Stufen, und betrachten deren Urbilder in X. Für $1 \le i \le k2^k$ setzen wir also

$$E(k,i) := \left\{x \in X \ : \ \frac{i-1}{2^k} \le f(x) < \frac{i}{2^k}\right\}, \qquad F(k) := \{x \in X : f(x) \ge k\}.$$

Weil f messbar ist, sind diese Mengen messbar. Wir definieren nun Stufenfunktionen, indem wir f "jeweils auf den unteren Wert" setzen:

$$s_k := \sum_{i=1}^{k2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{E(k,i)} + k\chi_{F(k)}$$

Die Monotonie der Folge (s_k) ist klar. Ferner gilt die Abschätzung $|s_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$, falls nur $f(x) \le k$. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz. $\square$

Diesen Satz werden wir erst später benutzen, zuerst im Beweis von Satz 17.

`5. Vorlesung, Mittwoch 23.4.08` ______________________________

3.4. **Definition des Integrals.** Wenn wir im folgenden das Integral einer Funktion f definieren, so lassen wir immer den Fall eines unendlichen Integrals zu. Damit wir allerdings in $\overline{\mathbb{R}}$ nicht die verbotene Operation $+\infty - \infty$ ausführen, werden wir die positiven und negativen Anteile $f_\pm$ getrennt integrieren.

Wir definieren zunächst ein Integral auf nicht-negativen Stufenfunktionen $s\colon X \to [0, \infty)$. Ist $E \in \Sigma(X)$ und hat s die Darstellung $s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \chi_{A_j}(x)$ mit Koeffizienten $a_j \ge 0$, so setzen wir

$$\int_E s\, d\mu := \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mu(A_j \cap E) \quad \in [0, \infty]. \tag{5}$$

Dabei erinnern wir an unsere Konventionen $0 \cdot \infty = 0$ und $a \cdot \infty = \infty$ für $a > 0$.

Beispiele. 1. $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist Stufenfunktion mit $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) + 0 \cdot \lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$. Also schließt (5) bereits nicht Riemann-integrable Funktionen ein.
2. Für $E \in \Sigma$ ist χ_E Stufenfunktion mit Integral

$$\int_X \chi_E\, d\mu = 0 \cdot \mu(X \setminus E) + 1 \cdot \mu(E) = \mu(E) = \int_E 1\, d\mu.$$

Ohne weitere Voraussetzungen an f kann man definieren:

Definition. Sei $E \in \Sigma(X)$. Dann ist das Integral von $f\colon X \to [0,\infty]$ die folgende Zahl in $[0,\infty]$:

$$\text{(6)} \qquad \int_E f\,d\mu := \sup\Big\{ \int_E s\,d\mu \;:\; s\colon X \to [0,\infty) \text{ Stufenfkt. mit } s(x) \le f(x) \text{ für } x \in E \Big\}$$

Weil die 0-Funktion eine Stufenfunktion ist, ist die Menge rechts nicht leer. Ist f selbst eine nicht-negative Stufenfunktion, so stimmt (6) mit dem Integral für Stufenfunktionen überein, denn für alle Stufenfunktionen $s \ge 0$ mit $s(x) \le f(x)$ auf E gilt $\int_E s\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$.

Im allgemeinen Fall von Funktionen f mit Werten in ganz $\overline{\mathbb{R}}$ benutzen wir die Zerlegung in die nicht-negativen Funktionen

$$f_\pm\colon X \to [0,\infty], \qquad f_+ := \max(0,f) \quad \text{und} \quad f_- := -\min(0,f) = \max(0,-f).$$

Ist f messbar, so auch $f_\pm$ nach Satz 10(i).

Definition. Sei (X,Σ,μ) Maßraum, $E \in \Sigma$ und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist eines der beiden durch (6) erklärten Integrale $\int_E f_+\,d\mu$, $\int_E f_-\,d\mu$ endlich, so ist das Integral von f

$$\text{(7)} \qquad \int_E f\,d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \quad \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ist f messbar und sind beide Integrale rechts endlich, so dass $\int_E f\,d\mu \in \mathbb{R}$, so heißt f *Lebesgue-integrierbar*. Wir schreiben $f \in \mathcal{L}^1(E)$, bzw. kurz $f \in \mathcal{L}^1$ falls $E = X$.

Ist also eine der beiden Funktionen $f_\pm$ über E integrierbar, während die andere Integral ∞ hat, so ist zwar $f \notin \mathcal{L}^1(E)$, aber laut (7) schreiben wir $\int_E f\,d\mu \in \pm\infty$. Jedoch ist $\int_E f\,d\mu$ nicht mehr erklärt, wenn beide Funktionen $\int_E f_\pm\,d\mu = \infty$ haben. Diejenigen Funktionen, für die $\int_E f\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ erklärt ist, bilden keinen Vektorraum (warum?); für $\mathcal{L}^1$ werden wir diese Eigenschaft aber nachweisen.

Beispiele. 1. Sei $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann haben die konstanten Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := c$ das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \in \{-\infty, 0, \infty\}$, je nachdem, ob $c < 0, = 0, > 0$ ist. Ist aber $c \ne \pm\infty$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(E)$ endlich, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(E)$.

2. Sei speziell $f\colon X \to [0,\infty]$. Dann gilt $\int f_- = 0$ und $\int f$ existiert immer. Für f messbar gilt dann $f \in \mathcal{L}^1 \iff \int f < \infty$.

3. Wir betrachten $X := \mathbb{N}$ und $\Sigma := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit dem Zählmaß $\mu(A) := \#A$. Eine nicht-negative Stufenfunktion $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit Werten $\{a_1, \dots, a_k\}$ hat das Integral

$$\text{(8)} \qquad \int_{\mathbb{N}} s\,d\mu \overset{(5)}{=} \sum_{j=1}^k a_j \# \big\{ s^{-1}(a_j) \big\} = \sum_{i=1}^\infty s(i).$$

Alle Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, $i \mapsto f(i)$ sind messbar. Ist speziell f nicht-negativ, so bilden wir das Supremums über (8) und erhalten als Zahl in $[0,\infty]$

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \qquad \text{für } f \geq 0. \tag{9}$$

Hat f nun Werte in ganz $\mathbb{R}$, so ist f Lebesgue-integrabel, wenn die beiden Summen $\sum f_+(i)$ und $\sum f_-(i)$ endlich sind. Weil genau dann die Reihe f absolut konvergiert, gilt in diesem Falle wiederum

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu \overset{(7)}{=} \int_{\mathbb{N}} f_+\,d\mu - \int_{\mathbb{N}} f_-\,d\mu \overset{(9)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f_+(i) - \sum_{i=1}^{\infty} f_-(i) \overset{f \text{ abs. kvgt.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

Wir fassen zusammen: Die messbare Funktion f auf dem Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ist μ-Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn die Reihe $\sum f(i)$ absolut konvergiert. Das Lebesgue-Integral enthält also als Spezialfall den Fall absoluter Konvergenz von Reihen.

Das Lebesgue–Integral hat folgende Eigenschaften, die uns nicht überraschen:

Satz 14. *Sei (X, Σ, μ) Maßraum, $E \in \Sigma$ und $f, g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:*
(i) Nullmengen*: $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f\,d\mu = 0$.*
(ii) *$f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu$.*
(iii) Einschränkung: *$A \subset E$ messbar, $f \in \mathcal{L}^1(E) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(A)$.*
(iv) Fast überall gleiche Funktionen: *$A \subset E$ messbar mit $\mu(E \setminus A) = 0$, $f \in \mathcal{L}^1(E) \Rightarrow$ $\int_A f\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.*
(v) *a)* Monotonie*: $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ und $f \leq g$ auf $E \Rightarrow \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.*
b) $a \leq f \leq b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{L}^1(E) \Rightarrow a\mu(E) \leq \int_E f\,d\mu \leq b\mu(E)$.
c) f messbar und beschränkt, $\mu(E) < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E)$. (Beispielsweise sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes.)
(vi) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(E)$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $cf \in \mathcal{L}^1(E)$ und $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$*

Beweis. Die Strategie besteht darin, die Gültigkeit schrittweise nachzuweisen:
• ev. Messbarkeit prüfen. • Nachweis für Stufenfunktionen $s \geq 0$, • für $f_\pm \geq 0$, • für f.

(i) Für alle Stufenfunktionen s gilt $\int_E s\,d\mu = 0$. Daraus folgt $\int_E f_\pm\,d\mu = 0$.

(ii) Die Gleichung gilt für Stufenfunktionen. Dabei ist es egal, welche Werte die Stufenfunktionen auf $X \setminus E$ haben. Für allgemeine Funktionen wird daher links und rechts das Supremum über dieselben Mengen reeller Zahlen gebildet.

(iii) Sicher ist $f|_A$ messbar. Aus $s \geq 0$ folgt $\int_A s\,d\mu \leq \int_A s\,d\mu + \int_{E\setminus A} s\,d\mu = \int_E s\,d\mu$ und weiter

$$\int_A f_+\,d\mu = \sup\left\{\int_A s\,d\mu : 0 \leq s \leq f_+\right\} \leq \sup\left\{\int_E s\,d\mu : 0 \leq s \leq f_+\right\} = \int_E f_+\,d\mu < \infty.$$

Für f_- argumentiert man analog.

(*iv*) Offenbar gilt dies auf dem Niveau der Stufenfunktionen.

(*v*)a) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ auf E, und eine für f_+ zulässige Stufenfunktion ist sicher auch für g_+ zulässig. Entsprechend für $g_- \leq f_-$. Es folgt

$$\int_E f_+ \, d\mu \leq \int_E g_+ d\mu \quad \text{und} \quad \int_E g_- \, d\mu \leq \int_E f_- \, d\mu.$$

Dies ergibt

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu \leq \int_E g_+ \, d\mu - \int_E g_- \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

b) und c) sind jeweils Spezialfälle.

(*vi*) Für Stufenfunktionen s gilt $\int_E cs \, d\mu = c \int_E s \, d\mu$. Ist nun etwa $c > 0$ und $f \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_E cf \, d\mu &= \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : 0 \leq s \leq cf \right\} = \sup \left\{ c \int_E \frac{s}{c} \, d\mu : 0 \leq \frac{s}{c} \leq f \right\} \\ &= c \sup \left\{ \int_E t \, d\mu : 0 \leq t \leq f \right\} = c \int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

Die übrigen Fälle behandelt man analog. □

Bemerkung. Der Satz gilt praktisch ohne Voraussetzung an f. Wir haben die Annahme, dass f Lebesgue-integrierbar ist, nur getroffen, um $\int f \, d\mu$ überhaupt hinschreiben zu können. Anders gesagt: Alle behaupteten Eigenschaften gelten ohne weitere Voraussetzungen bereits für Funktionen f mit einem Vorzeichen.

Welche Vorteile hat das Lebesgue-Integral? Es erlaubt die Integration von
• unbeschränkten Funktionen, und von
• Funktionen auf ganz allgemeinen Gebieten (nämlich messbaren), insbesondere auf nichtkompakten wie $\mathbb{R}^n$.
Das uneigentliche Integral ist also in das Lebesgue-Integral gewissermaßen eingebaut.

4. KONVERGENZSÄTZE

`6. Vorlesung, Mittwoch 30.4.08` ______________________________

Ein entscheidender Vorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral liegt darin, dass es vertauscht mit Grenzwerten von Funktionenfolgen, die schwächer als gleichmäßig konvergieren.

Natürlich vertauscht Integration nicht mit punktweiser Konvergenz, Gegenbeispiele hatten wir bereits bei der Riemann-Integration angegeben (welche?). In den Konvergenzsätzen für das Lebesgue-Integral nehmen wir deshalb zusätzlich zur punktweisen Konvergenz noch Monotonie bzw. Majorisierung an.

Es sei stets vorausgesetzt, dass $\big(X, \Sigma(X), \mu\big)$ Maßraum ist.

4.1. **Monotone Konvergenz.** Wir betrachten zuerst monoton konvergente Folgen von Stufenfunktionen. Beachten Sie, dass in $\overline{\mathbb{R}}$ jede monotone Folge a_k konvergiert (warum?).

Lemma 15. *Seien* $0 \leq t$ *und* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ *Stufenfunktionen mit* $0 \leq t \leq \lim\limits_{k\to\infty} s_k$. *Dann gilt*

$$\int_X t\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_X s_k\, d\mu.$$

Das Lemma wird verwendet werden mit $t = \lim s_k \geq s_k$; in diesem Fall folgt die umgekehrte Abschätzung aus der Monotonie.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun $B_k := \big\{x \in X : t(x) \leq (1+\varepsilon)s_k(x)\big\} \in \Sigma$. Dann gilt $t\chi_{B_k} \leq (1+\varepsilon)s_k$ auf X. Die Mengen B_k schöpfen X aus, $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = X$, denn $t(x) = 0 \Rightarrow x \in B_1$ und $t(x) > 0 \Rightarrow t(x) < (1+\varepsilon)s_k(x)$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$. (Gilt dies auch noch für $\varepsilon = 0$?)

Wir schreiben weiter $t = \sum_{j=1}^m a_j\chi_{A_j}$ mit $a_j \geq 0$ und $A_j \in \Sigma$ disjunkt. Für jedes j ist daher auch $(A_j \cap B_k)_k$ eine Ausschöpfung von A_j, und Satz 4(*iii*) ergibt

$$\mu(A_j) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_j \cap B_k)\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_j \cap B_k).$$

Wir schließen

$$\begin{aligned}\int_X t\, d\mu &= \sum_{j=1}^m a_j\mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^m a_j\mu(A_j \cap B_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} t\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X t\chi_{B_k}\, d\mu \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \int_X (1+\varepsilon)s_k\, d\mu = (1+\varepsilon) \lim_{k\to\infty} \int_X s_k\, d\mu \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Satz 16 (Satz über die monotone Konvergenz, Beppo Levi 1906)**.** *Es sei* (X, Σ, μ) *Maßraum,* $E \in \Sigma$ *und* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ *eine Folge messbarer Funktionen* $f_k\colon X \to [0,\infty]$. *Dann ist auch der punktweise Limes* $f := \lim\limits_{k\to\infty} f_k\colon X \to [0,\infty]$ *messbar, und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu = \int_E f\, d\mu \qquad \in [0,\infty].$$

Beweis. Nach Korollar 12 ist f messbar. Wegen der Monotonie des Integrals gilt $f_k \leq f$ $\Rightarrow \int f_k \leq \int f \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \leq \int f$. Es bleibt die umgekehrte Umgleichung zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$ und s Stufenfunktion mit $s \leq f$ auf E. Für $B_k := \big\{x \in E : s(x) \leq (1+\varepsilon)f_k(x)\big\}$ erhalten wir wie im Lemma $s\chi_{B_k} \leq (1+\varepsilon)f_k$ und $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = E$. Nun ist aber

$s\chi_{B_k}$ eine Stufenfunktion für alle $k \in \mathbb{N}$, und $0 \leq s\chi_{B_1} \leq s\chi_{B_2} \leq \ldots \leq s = \lim_{k\to\infty} s\chi_{B_k}$. Es folgt

$$\int_E s\,d\mu \overset{\text{Lemma}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \int_E s\chi_{B_k}\,d\mu \leq (1+\varepsilon) \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dies zeigt $\int_E s\,d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu$. Daraus folgern wir

$$\int_E f\,d\mu = \sup\Big\{ \int_E s\,d\mu \,:\, 0 \leq s \leq f \Big\} \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu.$$

□

Wir bringen nun Folgerungen aus dem Satz. Dazu definieren wir für $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ noch die Summe $(f+g)(x)$: dies ist $f(x)+g(x)$ falls definiert, und sonst (Fall $\infty - \infty$) setzen wir $(f+g)(x) := 0$ (jede andere Wahl geht auch). Von den folgenden drei Behauptungen ist die zweite erstaunlich:

Satz 17. *Es seien $E \in \Sigma(X)$ und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*
(i) Additivität*: Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$, so ist auch $f+g \in \mathcal{L}^1(E)$ mit*

$$\int_E f + g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu. \tag{10}$$

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(E) \iff |f| \in \mathcal{L}^1(E)$. *Es gilt dann*

$$\Big| \int_E f\,d\mu \Big| \leq \int_E |f|\,d\mu. \tag{11}$$

(iii) Majorisierung*: $g \in \mathcal{L}^1(E)$ mit $|f| \leq g \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E)$.*

Beweis. (i) Sind $s = \sum_{i=1}^I a_i\chi_{A_i}$ und $t = \sum_{j=1}^J b_j\chi_{B_j}$ Stufenfunktionen, so ist auch die Summe $s+t$ eine Stufenfunktion, denn sie ist konstant auf den Mengen $M_{ij} := A_i \cap B_j$ für $1 \leq i \leq I$ und $1 \leq j \leq J$ (Übung). Es folgt $\int s+t = \int s + \int t$.

Sind f, g nicht-negativ, so sind sie nach Satz 13 jeweils punktweiser Limes einer monotonen Folge von Stufenfunktionen (s_k), (t_k). Deshalb ist $f+g$ der punktweise Limes der monotonen Folge (s_k+t_k), und es gilt

$$\int_E f+g\,d\mu \overset{\text{B. Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E s_k + t_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E s_k + \lim_{k\to\infty} \int_E t_k\,d\mu \overset{\text{B. Levi}}{=} \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Den allgemeinen Fall erhält man, indem man E in vier Mengen zerlegt, auf denen f, g jeweils ihr Vorzeichen nicht wechseln. Man benutzt dann $\int -h = -\int h$ aus Satz 14(vi), zusammen mit dem eben bewiesenen Fall.

(ii) Es ist $|f| = f_+ + f_-$. Aus Satz 10 folgt, dass f genau dann messbar ist, wenn f_+ und f_- messbar sind. Weiter ist:

$$f = f_+ - f_- \text{ integrierbar} \overset{\text{Def.}}{\iff} f_+ \text{ und } f_- \text{ integrierbar} \overset{(i)}{\iff} |f| = f_+ + f_- \text{ integrierbar}.$$

Im letzten Schritt folgt „$\Leftarrow$“ daraus, dass die beiden Mengen $\{x : f(x) \geq \text{ bzw. } < 0\}$ messbar sind; nach Satz 14(*iii*) ist die Einschränkung von f auf diese Mengen integrierbar. Schließlich folgt aus $-|f| \leq f \leq |f|$ zusammen mit der Monotonie, Satz 14(v)a), dass $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$.

(*iii*) $\int_E g < \infty \Rightarrow \int_E |f| < \infty$ (Monotonie) $\Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(E) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E)$ (nach (*ii*)). □

Bemerkung. Warum mußten wir zum Beweis der Additivität den Satz über monotone Konvergenz benutzen, und konnten sie nicht direkt aus der Supremumsdefinition des Integrals erhalten? Hat man Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f$ und $0 \leq t \leq g$, so folgt aus $0 \leq s + t \leq f + g$ tatsächlich $\int f + g \geq \int f + \int g$. Auf “$\leq$” kann man nicht direkt schließen, weil man nicht weiß, dass jede Stufenfunktion $0 \leq r \leq f + g$ sich tatsächlich in $r = s + t$ mit $s \leq f$ und $g \leq t$ zerlegen läßt.

Aus (i), zusammen mit Satz 14(*vi*), erhalten wir:

Korollar 18. *Der Raum $\mathcal{L}^1(E)$ ist ein Vektorraum und $f \mapsto \int_E f\, d\mu$ ein lineares Funktional darauf.*

Beachten Sie, dass wir die Definition des Lebesgue-Integrals (6) bzw. (7) praktisch für beliebige Funktionen machen konnten. Die Messbarkeit der Funktionen müssen wir aber voraussetzen, um die vernünftigen Eigenschaften des Integrals, die in Satz und Korollar angegeben sind, zu erhalten.

4.2. **Majorisierte Konvergenz.** Punktweise Konvergenz und Integration sind zwar nicht vertauschbar. Im Falle nicht-negativer Funktionen hat man aber eine Ungleichung:

Lemma 19 (Fatou)**.** *Sind $f_k\colon X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen und ist $E \in \Sigma$, so gilt*

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu.$$

Beweis. Um den Satz über monotone Konvergenz anzuwenden, setzen wir

$$g_k := \inf\{f_j : j \geq k\} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Diese Funktionen sind messbar nach Satz 11, wegen $f_k \geq g_k$ gilt $\int_E f_k\, d\mu \geq \int_E g_k\, d\mu$, und die Folge (g_k) ist monoton wachsend mit punktweisem Grenzwert $\liminf_{k\to\infty} f_k$ (messbar ebenfalls nach Satz 11). Der Satz über monotone Konvergenz liefert daher

$$\liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu \geq \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k\, d\mu \overset{\text{B. Levi}}{=} \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu.$$

□

Beispiel. Im Lemma von Fatou kann die Ungleichung strikt sein. Wir betrachten dazu die Funktionenfolge $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $f_k := \chi_{[k,k+1]}$, deren Graphen wir als einen gleitenden Buckel ansehen. Die Funktionen f_k konvergieren punktweise gegen $f \equiv 0$, aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k\, d\lambda \neq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\, d\lambda = 1.$$

Wenn jedoch, anders als im Beispiel, eine integrable *Majorante* existiert, dürfen Integration und Grenzwert auch bei punktweiser Konvergenz vertauscht werden:

Satz 20 (über majorisierte Konvergenz *[dominated convergence thm.]*, Lebesgue 1910)**.** *Es sei (X, Σ, μ) Maßraum und $E \in \Sigma$. Die Funktionen $f, (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien messbar mit $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ (punktweise). Ferner gebe es eine integrierbare Funktion $g \colon X \to [0, \infty]$, so dass $|f_k| \le g$ für alle k. Dann sind f und f_k ebenfalls integrierbar mit*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Beweis. Es gilt $|f_k| \le g$ und daher auch $|f| \le g$. Nach Satz 17(*iii*) sind f_k und f integrierbar. Weiterhin ist $|f - f_k| \le 2g$ auf X. Wir wenden nun das Fatousche Lemma auf die Funktionenfolge $g_k := 2g - |f - f_k| \ge 0$ mit punktweisem Grenzwert $2g$ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_E 2g \, d\mu &= \int_E \liminf_{k\to\infty} \big(2g - |f_k - f|\big) \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k\to\infty} \int_E \big(2g - |f_k - f|\big) \, d\mu \\ &= \int_E 2g \, d\mu + \underbrace{\liminf_{k\to\infty} \int_E -|f_k - f| \, d\mu}_{\le 0} \le \int_E 2g \, d\mu.\end{aligned}$$

Wegen $\int_E 2g \, d\mu = 2 \int_E g \, d\mu < \infty$ folgt daraus $\int_E |f_k - f| \, d\mu \to 0$. Dies ergibt

$$\Big| \int_E f_k \, d\mu - \int_E f \, d\mu \Big| \overset{(11)}{\le} \int_E |f_k - f| d\mu \;\to\; 0.$$

□

Aufgabe. Für $E \in \Sigma$ sei $f_k \in \mathcal{L}^1(E)$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, d.h. es existiert ein $f \colon E \to \mathbb{R}$ mit $\sup_E |f - f_k| \to 0$. Bekanntlich vertauscht das (eigentliche) Riemann-Integral mit gleichmäßiger Konvergenz. Untersuchen Sie, ob sich diese Aussage auf Lebesgue-Integrale verallgemeinert:
(*i*) Ist $\mu(E) < \infty$, so gilt $f \in L^1(E)$ und $\lim \int_E f_k = \int_E f$.
(*ii*) Dies gilt aber nicht im Fall $\mu(E) = \infty$: Finden Sie eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $f_k \in \mathcal{L}^1([1, \infty))$, so dass $f := \lim f_k \notin \mathcal{L}^1([1, \infty))$. Tipp: $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

`7. Vorlesung, Mittwoch 7.5.08`

4.3. **Lebesgue- und Riemann-Integral.** Um Lebesgue–Integrale wirklich ausrechnen zu können, muss man das n-dimensionale Integral als iteriertes eindimensionales Integral auffassen (Satz von Fubini). Die eindimensionalen Integrale kann dann beispielsweise mit dem Hauptsatz ausrechnen.

Wir wissen schon, dass beispielsweise stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen Lebesgue-integrierbar sind (warum?). Wir zeigen nun dass auch der Wert des eindimensionalen Lebesgue-Integral mit dem Riemann–Integral übereinstimmt, und zwar für jede Riemann-integrierbare Funktion:

Satz 21. *Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so ist jede auf $[a,b]$ Riemann–integrierbare Funktion f auch Lebesgue–integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes λ, und*

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Ist f auf $[a,b]$ Riemann–integrierbar, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen $\varphi_k^- \le f \le \varphi_k^+$ mit $\int_a^b \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x)\,dx < \frac{1}{k}$ (siehe Analysis 2). Wir können voraussetzen, dass die Folgen (φ_k^-) bzw. (φ_k^+) monoton wachsen bzw. fallen, denn anderenfalls können wir φ_k^- durch $\max(\varphi_1^-, \dots, \varphi_k^-)$ ersetzen, bzw. φ_k^+ durch $\min(\varphi_1^+, \dots, \varphi_k^+)$.

Auf Treppenfunktionen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral nach Definition überein. Es ist also auch

$$\int_{[a,b]} \varphi_k^+ - \varphi_k^-\,d\lambda < \frac{1}{k}. \tag{12}$$

Die monotonen Funktionenfolgen $(\varphi_k^\pm)$ konvergieren punktweise auf $[a,b]$ gegen zwei messbare Funktionen $\varphi^\pm$ mit $\varphi^- \le f \le \varphi^+$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi^\pm$ mit f übereinstimmt, jedenfalls fast überall.

Aus $\varphi_1^- \le \varphi_k^- \le \varphi_k^+ \le \varphi_1^+$ und der Lebesgue–Integrierbarkeit von φ_1^- und φ_1^+ folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass $\varphi^\pm \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} \varphi_k^\pm\,d\lambda \to \int_{[a,b]} \varphi^\pm\,d\lambda.$$

Aus (12) folgern wir mit demselben Satz, dass $\int_{[a,b]} \varphi^+ - \varphi^-\,d\lambda = 0$. Aus den Übungen wissen wir, dass dann $\varphi^+ = \varphi^-$ fast überall gilt. Wegen $\varphi^- \le f \le \varphi^+$ folgt $\varphi^\pm = f$ fast überall. Wir schließen daraus $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi^-\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k^-\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k^-(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Ein uneigentliches Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ kann allerdings existieren, auch wenn $\int_{[0,\infty)} f(x)\,d\lambda$ nicht Lebesgue-integrabel ist:

Beispiel. Der Integralsinus hat ein uneigentliches Riemann-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, ist aber nicht Lebesgue-integrierbar auf $[0,\infty)$ (Übungen). Andererseits ist die Funktion $\frac{\sin x}{x^2}$ nicht nur uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[1,\infty)$ sondern auch Lebesgue-integrierbar nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (was ist die Majorante?).

Um das Beispiel zu verstehen, hilft es an die Äquivalenz zu erinnern $f \in \mathcal{L}^1\big([0,\infty)\big) \iff |f| \in \mathcal{L}^1\big([0,\infty)\big)$; die Existenz eines uneigentlichen Riemann-Integrals wie $\int_0^\infty f(x)\,dx$ impliziert aber keineswegs die Existenz von $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$.

5. Funktionalanalytische Eigenschaften

Warum ist das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral überlegen?

Für eine Analogie blicken wir zunächst auf das Zahlensystem. Eigentlich reichen zum Rechnen die rationalen Zahlen völlig aus. Warum wollen wir trotzdem die reellen Zahlen zur Verfügung haben? Die Antwort ist klar: Viele Zahlen, die vorkommen, sind Lösungen von Gleichungen. Aber wichtige Gleichungen wie $x^2 = 2$ haben in $\mathbb{Q}$ keine Lösung, und selbst wenn rationale Zahlen wie $1,4$ oder $1,4142136$ die Lösung $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ approximieren, so wäre es allein schon schwer sich zu verständigen, wenn die Zahl $\sqrt{2}$ nicht zur Verfügung stünde.

Ganz ähnlich verhält es sich mit Funktionen. Den Banachschen Fixpunktsatz kann man als eine (Fixpunkt-)Gleichung im Funktionenraum verstehen. Auf derartige Gleichungen stößt man beispielsweise, wenn man partielle Differentialgleichungen lösen möchte. Betrachtet man nur Riemann-integrierbare Funktionen, so könnte es passieren, dass die Lösungsfunktion gerade in einer „Lücke“ liegt. Erst in der Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird man die Lösungsfunktion mit Sicherheit finden. In dieser Vorlesung kann ich Ihnen dies leider nicht weiter belegen, aber Sie werden es in fortgeschrittenen Veranstaltungen wie partielle Differentialgleichungen oder Fourierreihen sehen; vielleicht auch in der *Funktionalanalysis*, die der Oberbegriff von Methoden ist, welche mit Funktionen wie mit Punkten (oder Zahlen) umgehen. Und immer dann, wenn Integrale eine Rolle spielen, wie z.B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie, ist die Formulierung mit Räumen von Lebesgue-integrablen Funktionen natürlich.

Der zentrale Begriff, der die Gleichungen in unseren beiden Fällen – Zahlenräume und Funktionenräume – lösbar macht, ist die Vollständigkeit. Die Vollständigkeit werden wir mit dem Satz von Fischer-Riesz beweisen. Zuerst müssen wir aber geeignete Räume von Funktionen und die passende Norm einführen.

5.1. **Die $\mathcal{L}^p$-Räume und die Integral-Halbnorm.** Der euklidische Abstand $\|x\|_2 := (\sum x_i^2)^{1/2}$ von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ hat gegenüber $\|x\|_1 := \sum |x_i|$ den Vorteil, dass er in 0 differenzierbar ist. Dies gilt gleichermassen auch für die p-Norm $\|x\|_p := (\sum x_i^p)^{1/p}$ mit $p > 1$, vergleiche Analysis 2.

Für Integrale als kontinuierlicher Grenzfall von Summen ist es genauso natürlich, anstelle von $\int f\, d\mu$ die Ausdrücke $(\int |f|^p\, d\mu)^{1/p}$ zu studieren. Dazu sei im folgenden stets $p \in [1, \infty)$. Wir definieren zuerst den Raum

$$\mathcal{L}^p(E) = \mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f \text{ messbar } : |f|^p \in \mathcal{L}^1(E, \mu)\}$$

und betrachten die Funktion

$$\|.\|_p \colon \mathcal{L}^p(E) \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man sieht sofort $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Zum Beweis der Dreiecksungleichung für $\|.\|_p$ benötigen wir die Höldersche Ungleichung.

Lemma 22. *Für $f, g \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar gelten folgende Ungleichungen in $\overline{\mathbb{R}}$:*
(i) Höldersche Ungleichung*: Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_E |fg| \, d\mu \le \Big(\int_E |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_E |g|^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

(ii) Minkowski-Ungleichung*: Für alle $p \ge 1$ gilt*

$$\Big(\int_E |f+g|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \le \Big(\int_E |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} + \Big(\int_E |g|^p \, d\mu \Big)^{1/p}.$$

Beweis. Da alle Integrale über nicht-negative Funktionen genommen werden, existieren sie.

(i) Wir geben den Beweis nur für $p = q = 2$, der allgemeine Fall geht genauso ($\rightsquigarrow$ Übungen).

Fall $\int f^2 \, d\mu = 1 = \int g^2 \, d\mu$: Aus der Ungleichung $0 \le (|x| - |y|)^2 \iff |xy| \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ schließen wir $\int |fg| \, d\mu \le \frac{1}{2} \int f^2 \, d\mu + \frac{1}{2} \int g^2 \, d\mu = 1$, was die Behauptung zeigt.

Fall $0 < \int f^2 \, d\mu, \int g^2 \, d\mu < \infty$: Setze $c := \int f^2 > 0$ und $\tilde{f} := \frac{f}{\sqrt{c}}$, sowie $d := \int g^2 > 0$ und $\tilde{g} := \frac{g}{\sqrt{d}}$. Dann ist $\int \tilde{f}^2 = \frac{1}{c} \int f^2 = 1 = \int \tilde{g}^2$, und nach dem ersten Fall gilt

$$\int |fg| \le \sqrt{c}\sqrt{d} \int |\tilde{f}\tilde{g}| \overset{\text{Fall 1}}{\le} \sqrt{c}\sqrt{d} = \sqrt{\int |f|^2} \sqrt{\int |g|^2}.$$

Fall $\int f^2 \, d\mu = 0$ oder $\int g^2 \, d\mu = 0$: Dann ist $f^2 = 0$ oder $g^2 = 0$ fast überall, und beide Seiten der Ungleichung verschwinden.

Fall $\int f^2 \, d\mu = \infty$ oder $\int g^2 \, d\mu = \infty$. Die Ungleichung ist trivial.

(ii) Wir bemerken, dass für $p = 1$ die Dreiecksungleichung bereits punktweise gilt. Es folgt ein Beweis nur für $p = 2$.

Falls die linke Seite in $(0, \infty)$ liegt, schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_E (f+g)^2 \, d\mu &\le \int_E |f||f+g| \, d\mu + \int_E |g||f+g| \, d\mu \\ &\overset{(i)}{\le} \sqrt{\int_E |f|^2 \, d\mu} \sqrt{\int_E |f+g|^2 \, d\mu} + \sqrt{\int_E |g|^2 \, d\mu} \sqrt{\int_E |f+g|^2 \, d\mu} \end{aligned}$$

und dividieren durch $\sqrt{\int_E |f+g|^2 \, d\mu}$.

Verschwindet die linke Seite, so ist die Ungleichung trivial. Ist die linke Seite unendlich, so folgt aus $\int |f+g|^2 = \int (f^2+g^2+2|fg|) \le 2\int f^2 + 2\int g^2$, dass auch einer der Summanden der rechten Seite unendlich ist. Also ist auch in diesem Fall die Ungleichung wahr. $\square$

Bemerkung. Für $f\colon E \to \mathbb{R}$ messbar ergibt die Höldersche Ungleichung

$$\|f\|_1 = \int_E |f \cdot 1|\, d\mu \le \Big(\int_E |f|^2\, d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_E 1\, d\mu\Big)^{1/q} = \big(\mu(E)\big)^{1/q}\, \|f\|_p.$$

Für $\mu(E) < \infty$ folgt also $\mathcal{L}^p(E) \subset \mathcal{L}^1(E)$. Entsprechend allgemein: Ist $\mu(E) < \infty$ und $p \le q$, so folgt $\mathcal{L}^q(E) \subset \mathcal{L}^p(E)$. Andererseits gilt für $E := [1,\infty)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$, dass zwar $f \notin \mathcal{L}^1(E)$ aber $f^2 \in \mathcal{L}^2(E)$.

Korollar 23. *Der Raum $\mathcal{L}^p$ ist Vektorraum und $\|.\|_p$ ist eine* Halbnorm *[seminorm] darauf, d.h. es gilt $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$, sowie $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ für $c \in \mathbb{R}$.*

5.2. **Die L^p-Räume.** Zur Norm fehlt $\|\cdot\|_p$ nur noch die Eigenschaft $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. Diese Eigenschaft stimmt leider nicht auf $\mathcal{L}^p$: Es gilt einerseits $\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_p = 0$ aber andererseits $\chi_{\mathbb{Q}} \not\equiv 0$. Ganz allgemein können Funktionen mit $\|.\|_p = 0$ auf Nullmengen jeden möglichen Wert annehmen. Für die Zwecke der Integration spielt aber das Verhalten auf Nullmengen gar keine Rolle. Mit der folgenden Konstruktion ignorieren wir es.

Man überprüft schnell, dass auf $\mathcal{L}^p$ die Relation

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f = g \text{ fast überall}$$

eine Äquivalenzrelation darstellt. Auf dem Quotientenvektorraum

$$L^p(E) = L^p(E,\mu) := \mathcal{L}^p(E)/\sim,$$

ist aber $\|.\|_p$ wohldefiniert: Es gilt $\|f\|_p = \|f+g\|_p$ für jedes g, das verschwindet mit Ausnahme von Nullmengen.

Beispiele. 1. $\chi_Q \sim 0$, so dass $[\chi_Q] = 0$.
2. Als Funktionen auf $[0,1]$ repräsentieren x^2 und $x^2 + \chi_{\mathbb{Q}}$ dasselbe Element von $L^p([0,1])$.

Elemente von L^p werden repräsentiert durch Funktionen, die wir nur fast überall kennen. D.h. eine Klasse $[f]$ legt einzelne Werte $f(x)$ gar nicht fest. Auf dem Raum L^p ist $\|.\|_p$ tatsächlich eine Norm, denn es gilt:

$$[f] \in L^p \text{ mit } \|f\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad [f] = 0 \quad (\text{„}f \text{ ist 0 fast überall“}).$$

`8. Vorlesung, Mittwoch 14.5.08` ______________________________

Die entscheidende Eigenschaft von L^p ist die Vollständigkeit:

Satz 24 (Riesz, Fischer 1907)**.** *Sei (X, Σ, μ) Maßraum und $E \in \Sigma$. Der Raum $L^p(E, \mu)$ ist vollständiger normierter Vektorraum* (Banachraum)*, d.h. jede Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_p$ konvergiert in L^p.*

Der Satz sagt also, dass für jede Cauchy-Folge $[f_k] \in L^p(E)$ eine Grenzfunktion $[f] \in L^p(E)$ existiert.

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber führen wir den Beweis nur für $p = 1$; der allgemeine Fall geht ganz genauso (siehe [E], S.231).

1. Durch einen Trick konstruieren wir zuerst die Grenzfunktion f. Die Schwierigkeit hierbei ist, dass wir nur Integral-Informationen über die Folge (f_k) besitzen.

Es repräsentiere (f_k) eine L^1-Cauchy-Folge, d.h. $\|f_k - f_\ell\|_1 \to 0$ für $k, \ell \to \infty$. Insbesondere gilt $\|f_{k+1} - f_k\|_1 \to 0$. Es gibt daher eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, so dass gilt $\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_1 \le 2^{-j}$. Setzen wir $g_j := |f_{k_j} - f_{k_{j-1}}| + \ldots + |f_{k_2} - f_{k_1}|$, so folgt daraus

$$\|g_j\|_1 \le \underbrace{\|f_{k_j} - f_{k_{j-1}}\|_1}_{\le 2^{-(j-1)}} + \ldots + \underbrace{\|f_{k_2} - f_{k_1}\|_1}_{\le 1/2} \le 1.$$

Die Folge messbarer Funktionen $g_j(x)$ ist in jedem Punkt $x \in E$ monoton wachsend. Daher konvergiert $g_j \ge 0$ punktweise gegen $g := \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}| \colon E \to [0, \infty]$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\|g\|_1 = \int g \, d\mu = \int \Big(\lim_{j \to \infty} g_j \Big) \, d\mu \overset{\text{B. Levi}}{=} \lim_{j \to \infty} \int g_j \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \|g_j\|_1 \le 1.$$

Dies zeigt: Es gibt eine Nullmenge $N \subset E$, so dass $g(x) < \infty$ für alle $x \in E \setminus N$.

Das Majorantenkriterium aus Analysis 1 ergibt daher: Die (Teleskop-)Reihe

$$f_{k_j}(x) = f_{k_1}(x) + \big(f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x) \big) + \ldots + \big(f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x) \big)$$

konvergiert absolut für jedes $x \in E \backslash N$. Also konvergiert f_{k_j} punktweise gegen eine messbare Funktion $f \colon E \backslash N \to \mathbb{R}$. Wir erweitern f zu einer Funktion auf ganz E, indem wir $f(x) := 0$ für $x \in N$ setzen (jede andere Wahl geht auch!).

2. Wir zeigen nun $[f] \in L^1$ und $\|f_k - f\|_1 \to 0$ für die ganze Folge. Nach dem Lemma von Fatou gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\int |f - f_m| \, d\mu = \int \liminf_{j \to \infty} |f_{k_j} - f_m| \, d\mu \le \liminf_{j \to \infty} \int |f_{k_j} - f_m| \, d\mu = \liminf_{j \to \infty} \|f_{k_j} - f_m\|_1. \tag{13}$$

Da (f_k) Cauchy-Folge ist, geht für $m \to \infty$ die rechte Seite gegen 0, und wir erhalten $\|f - f_m\|_1 \to 0$. Weiterhin muss für jedes $m \in \mathbb{N}$ die rechte Seite von (13) endlich sein. Daraus folgt $[f - f_m] \in L^1$ und weiter $[f] = [f - f_m] + [f_m] \in L^1$. □

Weil jede konvergente Folge auch Cauchy-Folge ist, hat der Beweis sogar noch etwas mehr geliefert. Er zeigt für für eine *in L^1 konvergente Folge* die Konvergenz einer Teilfolge, punktweise fast überall:

Korollar 25. *Seien $f_k, f \in \mathcal{L}^1(E)$ mit $f_k \to f$ in $L^1(E)$, d.h. $\|f - f_k\|_1 \to 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und eine Nullmenge $N \subset E$, so dass $f_{k_j}(x) \to f(x)$ für alle $x \in E \setminus N$.*

Beispiel. Wir teilen das Interval $[0,1]$ in 2^n Teile für $n \in \mathbb{N}$, die wir nacheinander durchnumerieren:

$$I_1 = [0,1],\ \ I_2 = [0,\frac{1}{2}],\ I_3 = [\frac{1}{2},1],\ \ I_4 = [0,\frac{1}{4}],\dots,\ I_7 = [\frac{3}{4},1],\ \ I_8 = [0,\frac{1}{8}],\dots,\ I_{16} = [0,\frac{1}{16}],\dots$$

Die charakterischen Funktionen $f_k := \chi_{I_k}$ bilden dann eine Cauchyfolge in $L^1([0,1])$, die gegen die Nullfunktion konvergiert. Die Folge $f_k(x)$ konvergiert jedoch für kein $x \in [0,1]$ punktweise (warum?). Für die Teilfolge $f_1, f_2, f_4, \dots, f_{2^k} \dots$ hat man aber punktweise Konvergenz gegen die Nullfunktion in $(0,1]$, d.h. die Aussage des Korollars wird dann mit $E := \{0\}$ erfüllt. Tatsächlich gilt die Aussage (und ihr Beweis) sogar für jede Teilfolge mit $\|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\| \le 2^{-j}$ (warum?).

Bemerkung. Der Raum $L^2(E)$ der *quadratintegrablen Funktionen* ist durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_E fg\,d\mu \quad \in \mathbb{R}$$

ausgezeichnet. Tatsächlich ist das Skalarprodukt für L^2-Funktionen definiert, denn

$$\big|\langle f, g\rangle\big| = \Big|\int_E fg\,d\mu\Big| \overset{(11)}{\le} \int_E |fg|\,d\mu \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_2\|g\|_2.$$

Das Skalarprodukt induziert die L^2-Norm $\|\cdot\|_2$ durch $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Ein vollständiger (unendlich-dimensionaler) Vektorraum mit Skalarprodukt heisst *Hilbertraum.* Der Hilbertraum L^2 hat besondere Bedeutung, z.B. für die Fouriertransformierte (siehe [F], §12) oder in der Quantenmechanik.

Es ist üblich, statt $[f] \in L^p$ einfach $f \in L^p$ zu schreiben; man denkt sich dabei, dass f nur fast überall definiert ist. Wir folgen dieser Konvention von nun an.

5.3. **Dichte Teilmengen von L^p.** Zum Aufwärmen zeigen wir:

Satz 26. *Sei (X, Σ, μ) Maßraum. Für jedes $1 \le p < \infty$ ist der Raum der integrierbaren Stufenfunktionen dicht in $L^p(X, \mu)$ (oder $\mathcal{L}^p(X, \mu)$).*

Die Aussage dieses Satzes kann man als Zusammenfassung unserer Definition des Lebesgue-Integrals verstehen: Wir haben das auf der dichten Teilmenge der Stufenfunktionen erklärte Integral fortgesetzt auf einen vollständigen Raum L^p.

Beweis. Sei $f \in L^p \subset L^1$. Dann ist auch $f_+ \in L^p$, denn f_+ ist die Einschränkung von f auf die messbare Menge $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$. Nach Satz 13 gibt es eine monotone Folge (s_k) von Stufenfunktionen mit $\lim s_k = f_+$. Da $f_+^p \in L^1$ die Funktionen s_k^p majorisiert, folgt aus Satz 17(*iii*), dass ebenfalls $s_k \in L^p$.

Wir zeigen nun $\|s_k - f_+\|_p \to 0$. Wir wenden den Satz von der majorisierten Konvergenz die Folge $0 \leq (f_+ - s_k)^p \leq f_+^p$ an. Er ergibt $\lim \int (f_+ - s_k)^p = \int \lim (f_+ - s_k)^p = 0$, so dass $s_k \to f_+$ in L^p.

Ebenso für f_-. Insgesamt ergibt dies das Resultat für f. □

Satz 27. *Für das Lebesguemaß λ liegt der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wir zeigen das Resultat nur für $p = 1$.

Nach dem letzten Satz (und der Integralabschätzung (11)) reicht es zu zeigen, dass $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht im Raum der integrierbaren Stufenfunktionen ist. In Satz 14(v)c) hatten wir bereits festgestellt, dass Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ integrierbar sind, also $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wir betrachten zuerst als Spezialfall die integrierbare Stufenfunktion $\chi_A \in L^1$, wobei A messbar mit $\lambda(A) < \infty$ ist. Um die Behauptung des Satzes für χ_A zu verifizieren, müssen wir zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A| \, d\lambda < \varepsilon$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Der Schnitt von A mit einem genügend großen Würfel, $\tilde{A} := A \cap [-R, R]^n$, erfüllt $\lambda(A) - \lambda(\tilde{A}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (Übung). Nun erinnern wir an die Charakterisierung (3) des Lebesgue-Maßes: Es existieren Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $K \subset \tilde{A} \subset U$ und $\lambda(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir nehmen $K \neq \emptyset$ an (sonst erfüllt $\varphi \equiv 0$ schon die Behauptung). Wenn wir U ersetzen durch $U \cap (-R-1, R+1)^n$, bleiben alle behaupteten Eigenschaften erhalten; daher dürfen wir $U \subset (-R-1, R+1)^n$ annehmen.

Weil das Kompaktum K von der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus U$ einen Abstand $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) = \inf\big\{\|x-y\| \ : x \in K, y \notin U\big\} > 0$ hat, können wir setzen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1], \qquad \varphi(x) := \max\left(0,\ 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,K)}{\operatorname{dist}(K,\, \mathbb{R}^n \setminus U)}\right).$$

Es gilt $\varphi|_K = 1$, $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = 0$ und $0 \leq \varphi \leq 1$ auf $U \setminus K$. Also haben wir

$$\int |\chi_A - \varphi| \, d\lambda \leq \int |\chi_A - \chi_{\tilde{A}}| \, d\lambda + \int \underbrace{|\chi_{\tilde{A}} - \varphi|}_{\leq 1} \, d\lambda \leq \big(\lambda(A) - \lambda(\tilde{A})\big) + \lambda(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

wie gewünscht.

Wir überzeugen uns nun noch, dass $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nach Wahl von U hat die Funktion φ ihren Träger im Würfel $[-R-1, R+1]^n$. Die Distanzfunktion $\operatorname{dist}(x, K) := \inf\{\|x-y\| : y \in K\}$ ist stetig für jede Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ (der Beweis folgt aus der Dreiecksungleichung); also ist auch φ stetig.

Wir betrachten nun eine allgemeine integrierbare Stufenfunktion $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ mit $a_j \neq 0$ und $\lambda(A_j) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem ersten Teil können wir für jedes j eine Funktion $\varphi = \varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$ wählen mit $\int |\chi_{A_j} - \varphi_j| < \frac{1}{m|a_j|}\varepsilon$. Die m-fache Dreiecksungleichung ergibt

$$\Big\| s - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j \Big\|_1 = \int \Big| \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j \Big| \, d\lambda \leq \sum_{j=1}^m |a_j| \int |\chi_{A_j} - \varphi_j| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Also leistet die Funktion $\sum a_j \varphi_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$ das Gewünschte. □

5.4. **Satz von Fubini und Transformationsformel für $\mathcal{L}^1$.** Zum Abschluss der Integrationstheorie geben wir die Lebesgueschen Versionen der beiden großen Sätze an, die wir für stetige Funktionen mit kompaktem Träger bereits kennen. Wir setzen diese Sätze durch Approximation von der dichten Teilmenge $C_c(\mathbb{R}^n)$ auf alle „Lücken" in L^1 fort. Dabei beschränken wir uns auf das Lebesgue-Maß λ. Wir schreiben λ_n, wenn wir betonen wollen, dass wir das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$ betrachten.

Der Satz von Fubini ist eigentlich die Aussage, dass die folgende Formel (14) gilt. Die Formulierung des Satzes wird dadurch etwas umständlich, dass man zuerst feststellen muss, dass alle Ausdrücke in (14) tatsächlich definiert sind.

Satz 28 (Fubini)**.** *(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ messbar. Dann sind für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$ bzw. $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktionen*

$$f_y := f(\cdot, y)\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \quad \textit{bzw.} \quad f_x := f(x, \cdot)\colon \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$$

messbar. Weiter sind die Funktionen

$$F\colon \mathbb{R}^m \to [0,\infty],\ y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n \quad \textit{bzw.} \quad G\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty],\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, d\lambda_m$$

messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \, d\lambda_n(x) \Big) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_m(y) \Big) d\lambda_n(x). \end{aligned} \tag{14}$$

(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$, so sind die Funktionen f_x bzw. f_y für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$ bzw. $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue–integrierbar. Weiter sind die fast überall definierten Funktionen F und G Lebesgue–integrierbar, und es gilt wieder (14).

Es gibt auch eine Version dieses Satzes für allgemeine Maßräume (siehe [E], S.175).

Eigentlich müßten wir zur Berechnung eines mehrdimensionalen Lebesgue-Integrals ein Supremum über die Integrale von Stufenfunktionen berechnen, und zwar getrennt für positiven und negativen Anteil. Wenn aber die iterierten Integrale alle Riemann-integrierbar sind, so braucht man nach dem Satz von Fubini nur ein n-fach iteriertes Riemann-Integral berechnen. Dies geht schon in einfachen Fällen über unseren früheren Satz 1 von Fubini für stetige Funktionen auf Quadern hinaus, z.B. für die charakterische Funktion einer Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Der Beweis folgt durch Approximation mit Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^{n+m})$. Wir geben hier nur die wichtigsten Schritte an.

Wir zeigen als erstes, dass (14) für jedes $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$ gilt. Nach Satz 21 stimmen eindimensionale Riemann-Integrale mit Lebesgue-Integralen überein. Aus diesem Satz erhalten wir aber wie folgt die entsprechende Behauptung für (mehrdimensionale) iterierte Riemann-Integrale.

Wir nehmen an, dass außerhalb eines Quaders Q mit $\operatorname{supp} \varphi \subset Q$ die Funktion φ bereits durch 0 fortgesetzt ist. Integrieren wir über nur eine Variable, so ist das Ergebnis eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in den verbleibenden Variablen; insbesondere ist es in jeder der verbleibenden Variablen eindimensional Riemann-integrierbar. Daher folgt (14) aus der Version des Satzes 1 von Fubini für stetige Funktionen auf Quadern.

Wir lassen nun einige Argumente aus, die zeigen, dass für fast alle x bzw. y die eingeschränkten Funktionen f_x bzw. f_y messbar (Teil (i)), bzw. integrierbar (Teil (ii)) sind. Entsprechend sind F bzw. G messbar und integrabel. Hierfür muss man Nullmengen eingehender diskutieren.

Nach diesem Schritt sind alle Ausdrücke in (14) definiert. Die Identitäten von (14) erhält man dann folgendermaßen. Sei $\varepsilon > 0$. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$, so gibt es nach Satz 27 ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. Aber für φ gelten die Identitäten von (14), also gelten sie für f bis auf einen Fehler ε. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gelten sie exakt. □

`9. Vorlesung, Montag 19.5.08` ______________________

Der andere große Satz, durch den viele Integrale erst berechenbar werden, ist die Transformationsformel.

Satz 29 (Transformationsformel). *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(V)$ genau dann, wenn $(f \circ \varphi)|\det d\varphi| \in \mathcal{L}^1(U)$ und*

$$\int_U f \circ \varphi \,|\det d\varphi|\, d\lambda = \int_V f \, d\lambda.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1$. Nach Satz 27 können wir eine Folge $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ finden mit $\|f - f_k\|_1 \to 0$. Laut Korollar 25 zum Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Nullmenge N, so dass sogar $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Betrachten wir nun $g_k := (f_k \circ \varphi)|\det d\varphi|$ und $g := (f \circ \varphi)|\det d\varphi|$.

Offenbar gilt $g_k(x) \to g(x)$ für alle $x \in U \setminus \varphi^{-1}(N)$. Wir behaupten $\varphi^{-1}(N)$ ist wieder Nullmenge. Dazu müssen wir zeigen, dass $\varphi^{-1}(N)$ durch Mengen beliebig kleinen Maßes überdeckt wird. Aber N wird durch Mengen vom Maß kleiner ε überdeckt, und im Fall dass φ^{-1} Lipschitz-Konstante ℓ hat, wird $\varphi^{-1}(N)$ demnach durch Mengen vom Maß kleiner $\varepsilon\ell$ überdeckt. Für allgemeines φ^{-1} schreiben wir den Definitionsbereich von φ^{-1} als Vereinigung von Mengen X_ℓ, auf denen φ^{-1} Lipschitzkonstante in $(\ell-1,\ell]$ hat.

Weil die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gilt, erhalten wir $\|g_k - g_\ell\|_1 = \|f_k - f_\ell\|_1$. Dies zeigt auch, dass (g_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(U)$ ist. Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist daher $g \in \mathcal{L}^1(U)$. Also erhalten wir wie gewünscht die Transformationsformel durch Grenzübergang:

$$\int_U g(x)\,d\lambda(x) = \lim_{k\to\infty} \int_U g_k(x)\,d\lambda(x) = \lim_{k\to\infty} \int_V f_k(y)\,d\lambda(y) = \int_V f(y)\,dy.$$

Sei nun umgekehrt $g := (f\circ\varphi)|\det d\varphi| \in \mathcal{L}^1(U)$. Anwendung des ersten Teiles auf g und $\psi := \varphi^{-1}\colon V \to U$ ergibt dann die Behauptung

$$\mathcal{L}^1(V) \ni (g\circ\psi)|\det d\psi| = \Big(f\circ\varphi\circ\psi|\det d\varphi\circ\psi|\Big)|\det d\psi| \overset{(*)}{=} f;$$

dabei folgt die Identität $(*)$ aus $(d\psi\circ\varphi)(x) = d\psi_{\varphi(x)} = (d\varphi_x)^{-1}$ (siehe Analysis 2). $\square$

Beispiel. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $A \in \mathsf{GL}_n$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\begin{aligned}\lambda\big(A(E)\big) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A(E)}(x)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E\big(A^{-1}x\big)\,d\lambda(x)\\ &= |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(A^{-1}x)|\det A^{-1}|\,d\lambda(x) \overset{\text{Trafo}}{=} |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\,d\lambda(y) = |\det A|\lambda(E).\end{aligned}$$

Wir folgern daraus:
(i) Ist $W = [0,1]^n$ der Einheitswürfel, so das Volumen des Bildes $\lambda\big(A(W)\big) = |\det A|$.
(ii) Ist $A \in \mathsf{O}(n)$ eine Bewegung, so bleibt das Volumen ungeändert: $\lambda\big(A(E)\big) = \lambda(E)$. Dies zeigt eine fundamentale Eigenschaft des Lebesgue-Maßes λ: Es ist bewegungsinvariant. Man könnte diese Aussage auch erhalten, indem man sie zunächst für Quader beweist und sie dann mit der Charakterisierung (3) auf Borel-Mengen überträgt; das ist jedoch mühseliger.

Teil 2. Integralsätze

Das n-dimensionale Lebesgue-Maß λ_n liefert einen sehr allgemeinen Inhaltsbegriff für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Wie wir gesehen haben, verschwindet dieses Maß auf niederdimensionalen Teilmengen wie beispielsweise Kurven oder Flächen in $\mathbb{R}^3$. Entsprechend verschwindet auch das Integral beliebiger Funktionen über solche Teilmengen.

Andererseits will man oft die Größe von Oberflächen von Körpern, also das Maß von Rändern von Mengen betrachten, oder Integrale von Funktionen darauf; z.B. für $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Im vorliegenden zweiten Teil der Vorlesung werden wir diese Begriffe allgemein einführen, und als Anwendung eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes auf mehrere Dimensionen angeben.

1. Untermannigfaltigkeiten

Die Zahl $\alpha \in \mathbb{N}\cup\infty$ steht hier immer für eine Differenzierbarkeitsordnung, $\alpha = \infty$ bedeutet Glattheit. Es wird reichen, den minimalen Wert $\alpha = 1$ zu betrachten.

1.1. Untermannigfaltigkeiten.

Den mathematisch präzisen Begriff einer n-dimensionalen "Fläche" mit Kodimension k hatten wir bereits in Analysis 2 eingeführt:

Satz 1. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt* n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit *[submanifold]* von $\mathbb{R}^{n+k}$, *wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gibt, für die eine der folgenden beiden äquivalenten Beschreibungen zutrifft:*
(i) Es existiert eine Funktion $\psi \in C^\alpha(V, \mathbb{R}^k)$ mit

$$M \cap V = \psi^{-1}(0)$$

und $\operatorname{rang} d\psi_x = k$ *für alle $x \in M \cap V$. (Der Wert 0 von ψ heißt dann* regulärer Wert*).*
(ii) Es existiert $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und ein C^α-Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$, so dass

$$M \cap V = \Phi\big(U \cap \mathbb{R}^n{\times}\{0\}\big).$$

Wir betrachten (ii) als eine *parametrische* Beschreibung von M einschließlich einer Umgebung V auf. In diesem Sinne sehen Untermannigfaltigkeiten lokal wie verbogene Untervektorräume aus.

Dagegen ist die Beschreibung (i) *implizit*. Nach dem Satz für implizite Funktionen läßt sich M in einer geeigneten Umgebung von p auch als Graph darstellen. Wenn beispielsweise die Koordinaten so durchnummeriert sind, dass die letzten k Koordinaten Funktionen der ersten n sind, kann man speziell $V = X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ wählen und es gilt als dritte äquivalente Beschreibung auch

$$M \cap V = \big\{(x, h(x)) : x \in X\big\} \qquad \text{für ein } h \in C^\alpha(X, Y).$$

Umgekehrt kann man aus der Graphenbeschreibung leicht ein Φ konstruieren, wie wir es z.B. in folgendem Bespiel machen.

Beispiel. $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist Untermannigfaltigkeit: Für die implizite Beschreibung reicht die Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \|x\|^2 - 1$, denn $\operatorname{grad}\psi(x) = 2x$, was auf $\mathbb{S}^n = \{x : \|x\|^2 = 1\}$ nicht verschwindet. Andererseits kann man die nördliche Hemisphäre $\{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} > 0\}$ auch parametrisch beschreiben durch

$$\Phi\colon \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \Phi(x,y) := \sqrt{1 - \|x\|^2} + y.$$

Die ganze Sphäre $\mathbb{S}^n$ läßt sich aber als Überdeckung von $2(n+1)$ offenen Hemisphären $H_i^\pm := \{x \in \mathbb{S}^n : \pm x_i > 0\}$ schreiben, die sich jeweils ganz genauso parametrisieren lassen.

Keine Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind:
(i) Die *Figur acht* $\{(\sin t, \sin 2t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, denn sie hat einen *Doppelpunkt* in 0.
(ii) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ oder $[0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$: In den Intervallendpunkten existieren die die geforderten Umgebungen nicht.
(iii) Der *Kegel* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2} - z = 0\}$, denn die Funktion ψ ist in der Spitze 0 nicht differenzierbar. Entfernt man die Spitze so erhält man aber eine Mannigfaltigkeit.

Bemerkung. Für viele Untermannigfaltigkeiten reicht eine einzige Menge V aus, die unabhängig von p ist. Für andere Beispiele muss man jedoch M mit mehreren Mengen V überdecken: Beispielsweise hat das *Möbiusband* in $\mathbb{R}^3$ nur eine Seite, und daher muss eine implizite Beschreibung wenigstens zwei überdeckende Mengen benutzen (siehe Übungen).

1.2. **Immersionen und Einbettungen als Parametrisierungen.** Unser Ziel ist eine parametrische Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten, bei der nicht noch eine Umgebung von M mitparametrisiert wird.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^{n+k})$ mit $\operatorname{rang} d\varphi_x = n$ für alle $x \in U$ heisst (C^α-)*Immersion*.

Beispiel. 1. Sphärische Koordinaten,

$$S\colon \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \qquad S(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

stellen eine Immersion dar. Das gilt jedoch nicht mehr, falls man einen vergrößerten (offenen) Definitionsbereich wählt, der auch Punkte mit $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ enthält ($\rightsquigarrow$ Übungen).
2. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ ist keine Immersion, denn $\varphi'(0) = 0$, also $\operatorname{rang} d\varphi_0 = 0$

3. Ist $h \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^k)$ für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist die Graphenabbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi(x) := \bigl(x, h(x)\bigr)$ eine C^α-Immersion, denn $J_\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1_n \\ J_h \end{smallmatrix}\right)$ in Blockmatrix-Schreibweise.

Das für uns wichtigste Beispiel einer Immersion ensteht durch die Einschränkung der definierenden parametrischen Abbildung Φ auf das Urbild der Untermannigfaltigkeit:

$$\varphi\colon W \to M \subset \mathbb{R}^{n+k}, \qquad \varphi(x) := \Phi(x, 0) \quad \text{mit } W := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in U\}.$$

Tatsächlich ist φ eine Immersion, denn weil Φ Diffeomorphismus ist, sind alle $n+k$ Spalten von J_Φ linear unabhängig. Die n ersten Spalten bilden aber die Jacobimatrix J_φ. Wir folgern:

Satz 2. *Ist $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit, so besitzt jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit folgender Eigenschaft: Es exisiert eine Immersion $f\colon W \subset \mathbb{R}^n \to V$, so dass*

$$M \cap V = f(W).$$

Umgekehrt kann das Bild einer Immersion Selbstschnitte besitzen und braucht deshalb keine Untermannigfaltigkeit zu parametrisieren. Um dennoch Untermannigfaltigkeiten durch Immersionen zu beschreiben, führen wir einen Begriff ein, der Selbstschnitte ausschließt.

Zuvor erinnere ich an den Begriff der *relativen Topologie*, die wir in Analysis 3/Funktionentheorie eingeführt hatten: Eine Teilmenge $U \subset M$ ist *relativ offen*, wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gibt mit $U = V \cap M$. Gemäß Charakterisierung von Stetigkeit durch offene Mengen (Urbilder offener Mengen sind offen) wird es dadurch möglich, von stetigen Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten zu sprechen.

Definition. Eine Abbildung $\varphi\colon M \to N$ zwischen Untermannigfaltigkeiten (oder ganz allgemein metrischen Räumen) heißt *Homöomorphismus*, wenn φ bijektiv ist und φ sowie φ^{-1} stetig sind. Ist eine Immersion ein Homöomorphismus auf ihr Bild, so nennt man sie *Einbettung [embedding]*.

`10. Vorlesung, Mittwoch 21.5.08` ______

Beispiele. 1. Der Kreisparametrisierung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$ ist zwar Immersion aber nicht Einbettung (da nicht injektiv).

2. Nicht jede stetige bijektive Abbildung ist Homöomorphismus: Betrachten wir eine injektive Kurve $\varphi\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t\to 1} \varphi(t) = \varphi(\frac{1}{2})$. Diese Bedingung bedeutet, dass die Umkehrabbildung nicht stetig ist, also ist φ kein Homöomorphismus auf sein Bild.

3. *Graphen*: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann ist die Graphenabbildung

$$\varphi\colon U \to M := \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \varphi(x) := \bigl(x, h(x)\bigr), \tag{1}$$

eine Einbettung. Die Umkehrabbildung ist die Projektion $\varphi^{-1}(x,y) = x$ und daher ist φ bijektiv. Weiter folgt $\varphi(\lim x_k) = \lim \varphi(x_k)$ aus der Stetigkeit von f, und die Projektion φ^{-1} ist ohnehin stetig.

Nun können wir einen Parametrisierungssatz für Untermannigfaltigkeiten formulieren:

Satz 3. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist genau dann eine n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^α-Einbettung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\varphi(U) = V \cap M$ gibt.*

In Zukunft werden wir nur noch solche Einbettungen φ als *Parametrisierung* einer Untermannigfaltigkeit bezeichnen.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Der Satz für implizite Funktionen erlaubt es, die implizit gegebene Untermannigfaltigkeit nach Umnummerierung der Koordinaten als Graph (1) darstellen, also parametrisch.

„$\Leftarrow$“: Wir wollen die gegebene Einbettung $\varphi\colon U \to M \subset V$ fortsetzen in die Umgebung $U \times \mathbb{R}^k$ von U, indem wir das Bild $\varphi(U)$ lokal als Graph schreiben, und eine Umgebung von $\varphi(U)$ mit Translationen des Graphen blättern. Dies wird die Abbildung $\Phi\colon R \to S$ konstruieren, wie sie in der Definition von Untermannigfaltigkeiten gefordert ist.

OBdA sei $p = \varphi(0)$. Durch Zusammenfassung der ersten n bzw. letzten k Koordinaten schreiben wir $\varphi = (\varphi_N, \varphi_K)\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Wegen der Immersionseigenschaft sind n der $n+k$ Zeilen von J_φ linear unabhängig. Nach Umnummerieren der Koordinaten können wir daher erreichen, dass $d\varphi_N$ Rang n im Punkt 0 hat. Der Umkehrsatz liefert dann eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von 0 in $\mathbb{R}^n$, so dass $\varphi_N\colon U_0 \to \varphi_N(U_0) =: W \subset \mathbb{R}^n$ ein C^α-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung φ_N^{-1} ist.

Daher hat

$$\Phi\colon U_0 \times \mathbb{R}^k \to W \times \mathbb{R}^k, \qquad \Phi(x,y) := \varphi(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_N(x) \\ \varphi_K(x) + y \end{pmatrix}.$$

die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \varphi_N^{-1}(\xi) \\ \eta - \varphi_K(\varphi_N^{-1}(\xi)) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist Φ ein C^α-Diffeomorphismus. Weiterhin gilt $\Phi\big(U_0 \times \{0\}\big) = \varphi(U_0)$.

Nun schränken wir Φ noch auf eine geeignete Menge R ein: Dazu sei $S := V \cap (W \times \mathbb{R}^k)$ und $R := \Phi^{-1}(S)$. Für die Abbildung $\Phi\colon R \to S$ gilt tatsächlich $\Phi\big(R \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}\big) = S \cap M$, denn nach Voraussetzung enthält die Menge V über die Punkte $\varphi(U)$ hinaus keine weiteren Punkte von M. Also ist $\varphi(U_0)$ eine n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit. $\square$

Wird eine Untermannigfaltigkeit M durch mehrere Parametrisierungen überdeckt, $M = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(U_i)$, so nennt man jede Parametrisierung φ_i eine *Karte*. Liegt ein Punkt p im Bild zweier Karten, so liefert der Kartenwechsel eine differenzierbare Abbildung zwischen den Parametergebieten:

Satz 4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und für $i = 1, 2$ seien $\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset M$ zwei C^α-Karten mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $T_i := \varphi_i^{-1}(V)$ offene Teilmengen von U_i und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon T_1 \to T_2$ ist C^α-Diffeomorphismus.*

Den Beweis, der die Abbildung Φ aus der Definition einer Untermannigfaltigkeit benutzt, finden Sie z.B. in [F], S.134/35. Um abstrakte Mannigfaltigkeiten einzuführen, muss man nur den Inhalt dieses Satzes zur Definition machen.

1.3. **Tangential- und Normalraum.** Wir erinnern an Analysis 2:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.
(i) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ heißt *Tangentialvektor an M in p*, wenn für ein $\varepsilon > 0$ ein stetig differenzierbarer Weg $c \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ existiert mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Der *Tangentialraum* $T_p(M)$ ist die Menge aller Tangentialvektoren an M in p.
(ii) Der *Normalraum* ist die Menge

$$N_pM := T_pM^\perp = \{\nu \in \mathbb{R}^{n+k} : \langle \nu, w\rangle = 0 \ \ \forall w \in T_p(M)\};$$

seine Elemente heißen *Normalenvektoren an M in p.*

Für jeden Fußpunkt $p \in M$ haben wir also eine orthogonale Zerlegung

$$T_pM \oplus N_pM = \mathbb{R}^{n+k}.$$

Beispiel. Sphären $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$: Ist $p \in \mathbb{S}^n$, so behaupten wir

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : v \perp p\} \quad \text{und} \quad N_pM = \{sp : s \in \mathbb{R}\}.$$

In der Tat: Für $0 \neq v \perp p$ ist $c(t) := \cos\big(\|v\|t\big)p + \sin\big(\|v\|t\big)\frac{v}{\|v\|}$ ein Großkreis in $\mathbb{S}^n$ durch $c(0) = p$ mit Tangentialvektor $c'(0) = v$ (Kettenregel).

Wie sehen Tangential- und Normalvektoren bei impliziter und parametrischer Beschreibung einer Mannigfaltigkeit aus?

Satz 5. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ und $p \in M$. Dann ist*

$$\dim(T_pM) = n, \qquad \dim(N_pM) = k$$

und diese Räume sind folgendermaßen gegeben:
(i) Ist M lokal implizit als $\{x \in \mathbb{R}^{n+k} : \psi(x) = 0\}$ beschrieben und $\psi(p) = 0$, so gilt

$$T_pM = \operatorname{kern} d\psi_p, \qquad N_pM = \operatorname{span}\big\{\operatorname{grad}\psi_1(p), \dots, \operatorname{grad}\psi_k(p)\big\}. \tag{2}$$

(ii) Ist M lokal parametrisch als $\{\varphi(x) : x \in W \subset \mathbb{R}^n\}$ beschrieben, so gilt für $\varphi(x) = p$

$$T_pM = \operatorname{im} d\varphi_x, \qquad N_pM = (\operatorname{im} d\varphi_x)^\perp.$$

Beweis. Die Dimensionsaussage und (i) hatten wir schon in Analysis 2 bewiesen. Für die parametrische Beschreibung ist klar, dass der Vektor $d\varphi_x(X) = \frac{d}{dt}\varphi(x + tX)|_{t=0}$ für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ tangential ist. Weil φ Immersion ist, ist $d\varphi_x(\mathbb{R}^n)$ ein n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{n+k}$. Aber $\dim T_pM = n$ und deshalb sind dies alle Tangentialvektoren. □

Beispiel. Graphen: Für $h \in C^1(U, \mathbb{R})$ betrachten wir wieder $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi(x) := \big(x, h(x)\big)$. Der Tangentialraum ist die lineare Hülle aller Vektoren $d\varphi(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$, also

$$T_{(x,h(x))}M = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ \partial_1 h(x) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_n \\ \partial_n h(x) \end{pmatrix} \right\}.$$

Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist φ Immersion. Offenbar wird das orthogonale Komplement aufgespannt durch den Einheitsvektor

$$\nu\big(x, h(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|^2}} \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} h(x) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dies ist die obere Normale an den Graphen.

1.4. **Kompakta mit glattem Rand.** Wir wollen nun den speziellen Fall einer Untermannigfaltigkeit betrachten, die eine kompakte Menge berandet. Man kann sich überlegen, dass es keine Einschränkung bedeutet, anzunehmen, dass die Untermannigfaltigkeit implizit durch eine einzige Funktion gegeben ist, und daher definieren wir:

Definition. Eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heisst *Kompaktum mit glattem Rand*, wenn sie eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt, so dass es eine Funktion $\psi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ gibt mit
(i) $\operatorname{grad}\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$, und
(ii) $A = \{x \in U : \psi(x) \le 0\}$.

Beispiele. 1. $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist Kompaktum mit glattem Rand $\mathbb{S}^n$, mit $\psi(x) = \|x\|^2 - 1$.
2. Sei allgemeiner nun B eine symmetrische und positiv definite Matrix. Dann definiert die quadratische Form $\psi(x) := \langle Bx, x\rangle - 1$ ein Kompaktum mit glattem Rand.
3. Ein Rotationstorus ist ein Kompaktum mit kompaktem Rand ($\rightsquigarrow$ Übung).

Lemma 6. *Es gilt $\partial A = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$.*

Beweis. Sei $x \in \partial A$. Nach Definition des Randes gibt es in jeder Umgebung von x ebensosehr Punkte aus A wie Punkte aus A^c, d.h. Punkte mit verschiedenem Vorzeichen von ψ.

Aus der Stetigkeit von ψ folgt $\psi(x) = 0$ (betrachte gegen x konvergente Folgen solcher Punkte).

Sei umgekehrt $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ suchen wir nun Punkte von $B_\varepsilon(x)$ in A und in $U \setminus A$. Ohnehin ist $x \in A$ gemäß Definition von A. Setze $X := \operatorname{grad}\psi(x) \neq 0$. Wegen U offen gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit h klein, dass $x + Xh \in U$. Aber es gilt

$$\psi(x + Xh) = \psi(x) + h\langle \operatorname{grad}\psi, X\rangle + o(h^2) > 0 \quad \text{für kleine } h > 0,$$

so dass $x + Xh \notin A$. □

Die Randmenge ∂A eines Kompaktums A mit glattem Rand ist deshalb eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Im Spezialfall von Kodimension 1 liefert (2) eine einfache Beschreibung des Normalraums:

Satz 7. *Sei $A = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann besitzt $M := \partial A$ ein stetiges Vektorfeld von äußeren Einheitsnormalen*

$$\nu\colon M \to N_pM \subset \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \nu(p) := \frac{1}{\|\operatorname{grad}\psi(p)\|}\operatorname{grad}\psi(p).$$

Weil 0 ein regulärer Wert von ψ ist, ist $\nu(p)$ tatsächlich definiert. Die Stetigkeit ist offensichtlich.

Beispiel. Für Sphären $\mathbb{S}^n_r$ (wobei $r > 0$) mit $\psi(x) := \|x\|^2 - r^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - r^2$ gilt $\operatorname{grad}\psi(x) = 2(x_1, \ldots, x_{n+1})$, also $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{r}$.

2. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

`11. Vorlesung, Mittwoch 28.5.08` ———————————

2.1. **Die Gramsche Determinante.** Wir wollen nun Größen wie $\operatorname{vol}_n(M)$ und $\int_M f$ über n–dimensionale Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^{n+k}$ definieren. Dazu werden wir Parametrisierungen benutzen.

Wir wollen dazu herauszufinden, um welchen Betrag eine Parametrisierung $\varphi\colon U \to M$ das Volumen verzerrt. Für Kodimension $k = 0$ wissen wir, dass die Antwort $|\det d\varphi|$ lautet. Aber für $k \geq 1$ ist J_φ nicht quadratisch und daher eine Determinante nicht definiert.

Zur Motivation betrachten wir zunächst den Fall, dass die Parametrisierung φ und damit

$$A := d\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$$

linear ist. Als Testvolumen verwenden wir den Einheitswürfel $W := [0,1]^n$. Für $k = 0$ gilt $\lambda_n(AW) = |\det A|$ (siehe Teil I). Für $k \geq 1$ ist aber $\lambda_{n+k}(AW) = 0$.

Die folgenden plausiblen Anforderungen reichen, um ein n–dimensionales Volumen $\mathrm{vol}_n(AW)$ in $\mathbb{R}^{n+k}$ festzulegen:
1. vol_n ist invariant unter Drehungen in $\mathsf{O}(n+k)$.
2. Für eine Menge $X \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ gilt $\mathrm{vol}_n\big(X \times \{0\}\big) := \lambda_n(X)$.

Der Unterraum $A(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ wird durch eine passende Drehung $B \in \mathsf{O}(n+k)$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ abgebildet (B ist nicht eindeutig). Nach 1. soll $\mathrm{vol}_n(AW) = \mathrm{vol}_n(BAW)$ sein. Wir benötigen weiterhin die Projektion $P\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto x$. Nach 2. soll gelten $\mathrm{vol}_n(BAW) = \lambda_n(PBAW)$. Weil aber $PBA\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear ist, heisst dies, dass wir festlegen

$$\mathrm{vol}_n(AW) := \lambda_n(PBAW) = |\det(PBA)|.$$

Diese Formel wird erst dadurch nützlich, dass wir die von A abhängige Drehung B eliminieren können:

$$|\det(PBA)|^2 = \det(PBA)^T \det(PBA) = \det(A^TB^TP^TPBA) \overset{(*)}{=} \det(A^T\underbrace{B^TB}_{=1_{n+k}}A) = \det(A^TA)$$

Bei $(*)$ haben wir benutzt: Wegen $P = (1_n \ 0)$ und $P^T = \left(\begin{smallmatrix} 1_n \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ folgt zunächst nur $P^TP = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; weil aber $\mathrm{Im}(BA) \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ gilt, stimmt $P^TPBA = BA$.

Die letzte Formelzeile zeigt $\det(A^TA) \geq 0$. Damit haben wir eine brauchbare Formel für das n–dimensionale Volumen von AW gefunden, die in jeder Kodimension $k \in \mathbb{N}$ funktioniert:

$$\mathrm{vol}_n(AW) = \sqrt{\det(A^TA)}.$$

Dies ist der Volumenverzerrungsfaktor von A, und wir müssen für den nichtlinearen Fall nur A durch die Linearisierung $J_\varphi(x)$ der Parametrisierung φ ersetzen. Wir geben im nichtlinearen Fall zuerst der Matrix A^TA und ihrer Determinante einen Namen:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion mit Jacobimatrix $J_\varphi(x)$ in $x \in U$. Die symmetrische $n \times n$-Matrix

$$g(x) = g_\varphi(x) := J_\varphi(x)^T J_\varphi(x), \qquad \text{d.h. } \big(g(x)\big)_{ij} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle,$$

heißt *erste Fundamentalform*, *metrischer Tensor* oder *Maßtensor* von φ. Die Funktion

$$\det g_\varphi = \det(J_\varphi^T J_\varphi)\colon U \to \mathbb{R}$$

heißt *Gramsche Determinante* von φ.

Die Jacobimatrix $J_\varphi(x)$ hat die n Spalten $d\varphi_x(e_i) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^{n+k}$. Wenn φ eine Immersion ist, sind für jedes $x \in U$ diese Spalten linear unabhängig, so dass $\mathrm{rang}\, J_\varphi \equiv n$ und auch $\mathrm{rang}\, g_\varphi \equiv n$. Wir haben daher nicht nur $\det g_\varphi(x) \geq 0$, sondern sogar $\det g_\varphi(x) > 0$.

Stehen insbesondere die (Richtungen der) Parameterlinien senkrecht aufeinander, d.h. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \perp \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)$ für alle $i \neq j$, so ist $g_\varphi(x)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\|^2$. Jeder dieser Einträge beschreibt das Quadrat der Verzerrung in der i-ten Koordinatenrichtung. Das Produkt der unquadrierten Verzerrungsfaktoren misst die Volumenverzerrung:

$$\sqrt{\det g_\varphi(x)} = \sqrt{\det\big(J_\varphi(x)^T J_\varphi(x)\big)} = \Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\Big\| \cdots \Big\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\Big\|.$$

Dieser Fall tritt beispielsweise für Rotationsflächen ein (siehe Übungen). Im allgemeinen ist g eine symmetrische Matrix. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation wird nach einer Drehung diese Matrix diagonal, so dass unser Fall allgemein ist.

Beispiele. 1. Ein eindimensionaler Graph $\big(x, h(x)\big)$ hat als erste Fundamentalform die 1×1-Matrix $g = \big(1\ h'\big)\left(\begin{smallmatrix}1\\ h'\end{smallmatrix}\right) = 1 + h'^2$, so dass $\sqrt{\det g} = \sqrt{1+h'^2}$. Deuten Sie dies als Längenverzerrungsfaktor des Graphen, das heißt als Länge der Hypothenuse des Steigungsdreiecks mit Basislänge 1.

2. Für den mehrdimensionalen Fall sehen wir uns zuerst Graphen linearer Funktionen an. Es sei $b \in \mathbb{R}^n$ und $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $h(x) = \langle x, b\rangle$. Der Graph $\varphi(x) = \big(x, h(x)\big)$ ist dann eine Hyperebene $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$; diese Hyperebene betrachten wir als n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die erste Fundamentalform hat die Matrix

$$g = \big(1_n\ b\big)\begin{pmatrix}1_n\\ b^T\end{pmatrix} = 1_n + bb^T.$$

Um die Determinante zu berechnen, überlegen wir uns, wie M aussieht. Geht man von einem beliebigen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ aus in einer Richtung des $(n-1)$-dimensionale Unterraums $b^\perp := \big\{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x\rangle = 0\big\}$, so bleibt h konstant, während in Richtung b der Graph φ seinen steilsten Anstieg hat. Damit kennen wir bereits die Eigenwerte von g: Der Raum $b^\perp$ liegt im Kern der Matrix bb^T, denn für $x \in b^\perp$ gilt $(bb^T)x = b\langle b, x\rangle = 0$; für die Matrix g bildet daher $b^\perp$ einen $(n-1)$-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1. Andererseits gilt

$$g(b) = b + bb^T b = b + b\langle b, b\rangle = \big(1 + \|b\|^2\big)b,$$

so dass b Eigenvektor von g zum Eigenwert $1 + \|b\|^2$ ist. Die Determinante ist nun das Produkt der n Eigenwerte:

$$\sqrt{\det g} = 1^{n-1}\sqrt{1+\|b\|^2} = \sqrt{1+\|b\|^2}. \tag{4}$$

Wie zu erwarten, ist diese Zahl immer ≥ 1, denn die Oberfläche des Graphen ist größer als die im Definitionsgebiet. Nach der angegebenen Deutung kann man den Volumenverzerrungsfaktor (4) wie folgt verstehen: Nur in Richung b werden Längen im Graphen verzerrt (entsprechend dem Steigungsdreieck aus 1.), während Richtungen in $b^\perp$ keine Verzerrung erfahren.

3. Der nichtlineare Fall eines Graphen $\varphi(x) := \big(x, h(x)\big)$, wobei $h \in C^1(U, \mathbb{R})$, ist nun nicht mehr schwer. Die Jacobimatrix ist $J_\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1_n \\ (\operatorname{grad} h)^T \end{smallmatrix}\right)$, wobei wir $\operatorname{grad} h$ als Spalte verstehen. Wir müssen daher nur $b := \operatorname{grad} h$ im vorherigen Beispiel setzen, und erhalten daraus

$$\sqrt{\det g_\varphi} = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h\|^2}. \tag{5}$$

2.2. **Inhalte von Immersionen und Oberflächenintegrale.** Mit der Gramschen Determinante können wir die Inhalte von Immersionen bestimmen, indem wir im Urbild integrieren, wobei wir jedoch mit der Flächenverzerrung gewichten. Genauso läßt sich das Integral von Funktionen über Flächen definieren. Dabei nehmen wir an, dass die Funktionen auf dem Parametergebiet der Immersion definiert sind, so dass sie in Doppelpunkten des Bildes tatsächlich verschiedene Werte annehmen können.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion.
(i) Wenn $E \subset U$ messbar ist, so ist das *n–dimensionale Volumen* der Immersion $\varphi|_E$ gegeben durch

$$S_\varphi(E) := \int_E \sqrt{\det g_\varphi(x)}\, d\lambda_n(x). \tag{6}$$

(ii) Eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ ist *integrierbar bezüglich* φ mit Integral

$$\int_U F\, dS_\varphi := \int_U F(x)\sqrt{\det g_\varphi(x)}\, d\lambda_n(x) \tag{7}$$

wenn der Integrand rechts eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf U ist.

Man kann $S_\varphi(E)$ als Maß mit Dichte $\sqrt{\det g_\varphi}$ verstehen; aus den Übungen folgt, dass derart tatsächlich ein Maß definiert ist. Man nennt es das *Oberflächenmaß*.

Beispiele. 1. Das Oberflächenmaß einer Kurve ist gerade ihre Länge, siehe Übungen. Jedoch wird die Länge "mit Multiplizität" gerechnet: Die Kurve $e^{it}\colon (0, 3\pi) \to \mathbb{C}$ hat Länge 3π.
2. Ein Graph $\varphi\big(x, h(x)\big)$ mit $h \in C^1(U^n, \mathbb{R})$ hat das n-dimensionale Volumen

$$\int_U \sqrt{\det g_\varphi(x)}\, d\lambda_n(x) \overset{(5)}{=} \int_U \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h\|^2}\, d\lambda_n(x).$$

Ist etwa $h\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) := \cosh x$ mit $\operatorname{grad} h = \left(\begin{smallmatrix} \sinh x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, so lautet der Flächeninhalt

$$\int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \sinh x^2}\, d\lambda_2(x) = \int_0^1 \int_0^1 \cosh x\, dx dy = \sinh x\Big|_0^1 = \sinh 1.$$

Tatsächlich ist $\sinh 1 = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) > 1$ und daher hat der Graph tatsächlich größeren Inhalt als seine Projektion, das Einheitsquadrat in der xy-Ebene.
3. Ist E eine Nullmenge, so verschwinden auch $S_\varphi(E)$ und $\int_E F\, dS$ für jede Immersion φ und alle F.

Das Flächenmaß (6) und das Oberflächenintegral (7) hängen nur vom Bild (und der Multiplizität) der Immersion ab, nicht von der speziellen Parametrisierung. Dies zeigt man mit der Transformationsformel:

Lemma 8. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $\tau\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und $F\colon V \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_U F\big(\tau(x)\big)\sqrt{\det g_{\varphi\circ\tau}(x)}\,d\lambda_n(x) = \int_V F(y)\sqrt{\det g_\varphi(y)}\,d\lambda_n(y),$$

sofern einer der beiden Integranden (über U bzw. V) integrierbar ist; in diesem Fall ist es auch der andere.

Beweis. Die Kettenregel $J_{\varphi\circ\tau}(x) = J_\varphi\big(\tau(x)\big)J_\tau(x)$ ergibt (jeweils an den richtigen Stellen):

$$\det g_{\varphi\circ\tau} = \det\big(J_{\varphi\circ\tau}^T J_{\varphi\circ\tau}\big) = \det\big(J_\tau^T J_\varphi^T J_\varphi J_\tau\big) = \det J_\tau^T \det(J_\varphi^T J_\varphi)\det J_\tau = (\det d\tau)^2 \det g_\varphi$$

Daraus erhalten wir, zusammen mit der Transformationsformel,

$$\begin{aligned}\int_U F\big(\tau(x)\big)\sqrt{\det g_{\varphi\circ\tau}(x)}\,d\lambda_n(x) &= \int_U F\big(\tau(x)\big)\sqrt{\det g_\varphi\big(\tau(x)\big)}\,\big|\det d\tau_x\big|\,d\lambda_n(x)\\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_V F(y)\sqrt{\det g_\varphi(y)}\,d\lambda_n(y).\end{aligned}$$

Aus dem Transformationssatz folgt auch die Äquivalenz der Integrierbarkeit beider Seiten. □

2.3. **Maße und Integrale auf Untermannigfaltigkeiten.** Wir wollen nun allgemeiner über Untermannigfaltigkeiten integrieren. Dabei betrachten wir nur den Fall, dass endlich viele Karten für die Parametrisierung ausreichen, d.h. $M = M_1 \cup \ldots \cup M_m$, wobei $M_i := \varphi_i(U_i)$. Um eine disjunkte Zerlegung zu erhalten, setzen wir

$$N_1 := M_1, \quad N_2 := M_2 \setminus M_1, \quad \ldots \quad N_m := M_m \setminus \{M_1 \cup \ldots \cup M_{m-1}\}. \tag{8}$$

In vielen Beispielen kann man die N_i so wählen, dass nur N_1 keine Nullmenge ist.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit mit endlich vielen Karten $\varphi_j\colon U_j \to M$ und N_j wie zuvor.
(i) Ist für $A \subset M$ die Menge $\varphi_j^{-1}(A \cap N_j) \subset U_j$ messbar für alle j, so heisst A messbar mit

$$S_M(A) := S_{\varphi_1}\big(\varphi_1^{-1}(A \cap N_1)\big) + \ldots + S_{\varphi_m}\big(\varphi_m^{-1}(A \cap N_m)\big). \tag{9}$$

(ii) Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls $F_j := f \circ \varphi_j$ für jedes j integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_M f\,dS_M := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(N_j)} F_j(x)\sqrt{\det g_{\varphi_j}(x)}\,d\lambda_n(x). \tag{10}$$

`12. Vorlesung, Mittwoch 4.6.08`

Man muss nachprüfen, dass auch S_M ein Maß ist, das *Oberflächenmaß* auf M. Wir behaupten, dass (9) (10) nicht von der Zerlegung in die Karten φ_j abhängt. In der Tat, seien $\tilde{\varphi}_j\colon \tilde{U}_j \to \tilde{M}_j$ eine weitere Familie von Karten, mit Mengen $\tilde{N}_j$ wie in (8). Auf jeder Verfeinerungsmenge $\Omega_{ij} := N_i \cap \tilde{N}_j$ zeigt Lemma 8, dass das Maß bezüglich φ_i und $\tilde{\varphi}_j$ übereinstimmt. Die Behauptung folgt nun durch Aufsummieren.

Ich schreibe im folgenden oft auch vol oder vol_n für das Oberflächenmaß S_M, wann immer mir das suggestiver erscheint.

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $r > 0$. Für jede Karte $\varphi\colon U \to M$ von M erhält man für die skalierte Menge $rM := \{rx : x \in M\}$ eine Karte $r\varphi\colon U \to rM$; also ist auch rM Untermannigfaltigkeit. Weiter folgt aus $d(r\varphi) = r\,d\varphi$, dass $\det g_{r\varphi} = r^{2n} \det g_\varphi$. Folglich gilt für jede messbare Teilmenge $E \subset M$

$$(11) \qquad S_{rM}(rE) = r^n S_M(E) \qquad \text{und} \qquad \int_{rM} f(x)\,dS_{rM}(x) = r^n \int_M f(rx)\,dS_M(x)$$

für jede integrierbare Funktion $f\colon rM \to \mathbb{R}$.

3. INTEGRALSÄTZE

Das wichtigste Satz der Differential– und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen ist der Hauptsatz, der besagt, dass $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$ für jede stetig differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun eine Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen herleiten, die ein Randintegral als ein Integral über die abgeleitete Funktion ausdrückt.

3.1. **Divergenz.** Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, so heißt

$$\operatorname{div} F\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x),$$

die *Divergenz* von F. Ist $\operatorname{div} F \equiv 0$, so sagt man F ist *divergenzfrei*.

Beispiele. 1. $F(x) := x$ hat $\operatorname{div} F = n$.
2. Das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (y, -x)$ hat $\operatorname{div} F \equiv 0$.
3. $F\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) := \frac{x}{\|x\|^n}$ ist divergenzfrei (rechnen!).

Physiker betrachten $\operatorname{div} F$ als Quelldichte oder -stärke von F. Ist F beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer bewegten Flüssigkeit, so bedeutet $\operatorname{div} F \equiv 0$, dass die Flüssigkeit *inkompressibel* ist. Im dritten Beispiel können wir daher F als Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit deuten, die von einer Quelle am Ursprung radialsymmetrisch nach ∞ fließt. (Wieso muss die Radialgeschwindigkeit der Flüssigkeit in $\|x\|$ abnehmen?).

Wir wollen nun genauer darstellen, warum man $\operatorname{div} F$ als Quelldichte verstehen kann. Dazu definieren wir die Quelldichte über einen Grenzübergang: Wir messen, welche Quellen innerhalb eines kleinen Testwürfels $W_\varepsilon(x)$ auftreten und teilen durch das Testvolumen $\operatorname{vol} W_\varepsilon(x)$. Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ erhalten wir die gesuchte Quelldichte in x. Um festzustellen, welche Quellen in $W_\varepsilon(x)$ liegen, messen wir, was durch den Rand des Würfels hindurchfließt. Dazu integrieren wir die Normalkomponente $\big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle = \|F(x)\| \cos\angle\big(F(x), \nu(x)\big)$ des Vektorfeldes über den Würfelrand. Unsere Behauptung "Quelldichte in x gleich Divergenz in x" lautet also

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(W_\varepsilon(x))} \int_{\partial W_\varepsilon(x)} \langle F, \nu\rangle \, dS = \operatorname{div} F(x) \tag{12}$$

Wir beweisen nun (12) im einfachsten Falle eines Vektorfeldes $F = F(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$. Es sei $W = W_\varepsilon(a, b) \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat der Kantenlänge 2ε mit Mittelpunkt (a, b). Seine vier Seitenintervalle indizieren wir mit den vier Himmelsrichtungen, als Normalen kommen $\pm e_1$ und $\pm e_2$ vor. Die Oberflächenintegrale über die vier Seitenintervalle vereinfachen sich zu gewöhnlichen eindimensionalen Integralen, auf die wir die Mittelwertsätze der Differentialrechnung und der Integralrechnung anwenden können:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial W} \langle F, \nu\rangle \, ds &= \int_{I_O} F_1 \, ds - \int_{I_W} F_1 \, ds + \int_{I_N} F_2 \, ds - \int_{I_S} F_2 \, ds \\
&= \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} F_1(a+\varepsilon, y) - F_1(a-\varepsilon, y) \, dy + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} F_2(x, b+\varepsilon) - F_2(x, b-\varepsilon) \, dx \\
&\overset{\text{MWS Diff.}}{=} 2\varepsilon \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{\partial F_1}{\partial x}\big(\xi(y), y\big) \, dy + 2\varepsilon \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\partial F_2}{\partial y}\big(x, \eta(x)\big) \, dx \\
&\overset{\text{MWS Int.}}{=} (2\varepsilon)^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}\big(\xi(y_0), y_0\big) + (2\varepsilon)^2 \frac{\partial F_2}{\partial y}\big(x_0, \eta(x_0)\big).
\end{aligned}$$

Dabei liegen die Zwischenstellen $\xi(y)$ und x_0 im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, sowie $\eta(x)$ und y_0 im Intervall $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Nun sehen wir uns den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ an. Offenbar gehen $\xi(y), x_0 \to a$ und $\eta(x), y_0 \to b$. Daher folgt aus der letzten Gleichung nach Division durch $(2\varepsilon)^2$ unsere Behauptung (12):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_2(W_\varepsilon(a, b))} \int_{\partial W_\varepsilon(a,b)} \langle F, \nu\rangle \, ds = \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b) = \operatorname{div} F(a, b).$$

Die Würfeloberfläche ist keine glatte Mannigfaltigkeit und daher haben wir mit unserer Herleitung den Fall des Oberflächenintegrals von C^1-Mannigfaltigkeiten überschritten. Weil jedoch die Würfelkanten Nullmengen in der Würfeloberfläche sind, sieht man schnell, dass man auch nach Glättung der Kanten dasselbe Ergebnis erhält.

3.2. **Der Gaußsche Integralsatz.**

Satz 9 (Gaußscher Integralsatz *[divergence theorem]*). *Es sei U offen und $A \subset U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kompaktum mit glattem Rand und äußerem Normalenfeld $\nu \colon \partial A \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt für jedes Vektorfeld $F \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+1})$*

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_{n+1} = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, dS_{\partial A}. \tag{13}$$

Die linke Seite gibt die aufsummierten Quellen des Vektorfeldes F in A an, die rechte Seite den Gesamtfluss von F über den Rand des Kompaktums. Ist speziell F divergenzfrei, so sagt der Integralsatz, dass der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet; tatsächlich fließt bei einer inkompressiblen Flüssigkeit zu jedem Zeitpunkt genauso viel in A hinein wie aus A heraus.

Die Forderung, dass F auf einer ganzen Umgebung U von A definiert ist, dient lediglich dazu, die Differenzierbarkeit von F in ∂A sicherzustellen; es gibt schwächere Formulierungen dieser Bedingung.

Beispiele. 1. *(Flächeninhalt der Einheitssphäre)* Für das Vektorfeld $F \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$, $F(x) = x$ ist $\operatorname{div} F(x) = n + 1$. Ist nun $A := B^{n+1}$, so hat $\partial B^{n+1} = \mathbb{S}^n = \{x : \|x\|^2 = 1\}$ das Normalenfeld $\nu(x) = x$. Es folgt die Beziehung

$$\operatorname{vol}_{n+1}(B^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \int_{B^{n+1}} \operatorname{div} F \, d\lambda_{n+1} \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{S}^n} \|x\|^2 \, dS_{\partial A}(x) = \frac{1}{n+1} \operatorname{vol}_n(\mathbb{S}^n).$$

2. Machen Sie sich klar, dass der Gaußsche Satz für $n = 1$ gerade den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt.

`13. Vorlesung, Mittwoch 11.6.08` ______________________________

Aufgaben. 1. Die Quellgleichung (12) gilt nicht nur für Würfel, sondern für beliebige Folgen von Kompakta $A_k(x)$ mit glattem Rand, die die Eigenschaft hat, dass jede Folge $x_k \in A_k(x)$ gegen $x = \lim x_k$ konvergiert.

2. Zeigen Sie die Variante des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_A \operatorname{grad} u \, d\lambda = \int_{\partial A} u\nu \, dS.$$

und folgern Sie $\int_K \nu = 0$ für jedes Kompaktum mit glattem Rand. Die Variante hat verschiedene interessante Anwendungen, z.B. die Mittelwertsformel für harmonische Funktionen.

Bemerkung. Zur Entdeckung des Integralsatzes zitiere ich aus Wikipedia (3/07): The theorem was first discovered by Joseph Louis Lagrange in 1762, then later independently rediscovered by Carl Friedrich Gauss in 1813, by George Green in 1825 and in 1831 by Mikhail Vasilievich Ostrogradsky, who also gave the first proof of the theorem. Subsequently, variations on the Divergence theorem are called Gauss's Theorem, Green's theorem, and Ostrogradsky's theorem.

Falls F differenzierbar mit kompakten Träger ist, verschwindet bei Wahl eines geeignet großen Kompaktums das Randintegral. Wir beweisen den Gaußschen Integralsatzes zuerst in diesem Spezialfall. Wir setzen dazu $C_c^1(U,\mathbb{R}^n) := C_c(U,\mathbb{R}^n) \cap C^1(U,\mathbb{R}^n)$.

Lemma 10. *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.*
(i) Für jedes $1 \le j \le n+1$ gilt

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\lambda_{n+1} = 0 \qquad \text{für alle } f \in C_c^1(U). \tag{14}$$

(ii) Für jedes $F \in C_c^1(U,\mathbb{R}^{n+1})$ gilt der Gaußsche Satz, $\int_U \operatorname{div} F\, d\lambda_{n+1} = 0$.

Beweis. Wir können $U = \mathbb{R}^{n+1}$ annehmen, indem wir f, F durch 0 fortsetzen.

(i) Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp} f \subset [-R,R]^{n+1}$. Insbesondere verschwindet f auf dem Rand des Würfels $[-R,R]^{n+1}$. Wir betrachten nun $j = 1$; für die übrigen j verläuft der Beweis analog. Für jedes $x = (x_1,\dots,x_{n+1}) \in U$ ergibt der Hauptsatz

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1 = f(R,x_2,\dots,x_{n+1}) - f(-R,x_2,\dots,x_{n+1}) = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_{n+1}(x) &= \int_{[-R,R]^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_{n+1}(x) \\ &= \int_{[-R,R]^n} \left(\int_{-R}^{R} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_1(x_1) \right) d\lambda_n(x_2,\dots,x_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

(ii) Folgt aus (i) durch Summation über die Komponenten $f := F_i$. □

3.3. **Beweis des Gaußschen Integralsatzes.** Wir geben nun den Beweis des Gaußschen Integralsatzes im Spezialfall, dass F auf einem Teil des Randes nicht verschwindet; dieser Teil soll Graph sein. Dies werden wir später als eine lokale Version des Gaußschen Satzes verstehen.

Lemma 11. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $h \in C^1(U,I)$. Wir betrachten nun $A := \Big\{(x,y) \in U \times I : a \le y \le h(x)\Big\}$ und $M := \Big\{(x,y) \in U \times I : y = h(x)\Big\}$. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} F\, d\lambda_{n+1} = \int_M \big\langle F, \nu \big\rangle\, dS_M \qquad \text{für jedes } F \in C_c^1(U \times I, \mathbb{R}^{n+1}). \tag{15}$$

Beweis. Es sei ν_j die j-te Komponente des Normalenvektors (3)

$$\nu\big(x,h(x)\big) := \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} h(x)\|^2}}\begin{pmatrix}-\operatorname{grad} h(x)\\ 1\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Die Integranden beider Seiten von (15) sind jeweils eine Summe von $n+1$ Termen. Wir behaupten, dass die Gleichheit der Integrale sogar summandenweise gilt: Für jedes $j \in \{1,\dots,n+1\}$ erfüllt die Funktion $f := F_j \in C^1_c(U\times I)$ die Identität

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}\,d\lambda_{n+1} = \int_M f\nu_j\,dS_M. \tag{17}$$

Durch Aufsummieren über alle $n+1$ Komponenten folgt daraus (15).

Zunächst eine Vorbemerkung. Für die Immersion $x \to \big(x,h(x)\big)$ ist das Oberflächenmaß laut (5) gegeben durch $dS_M(x) = \sqrt{1+\|\operatorname{grad} h(x)\|^2}\;d\lambda_n(x)$. Zusammen mit (16) folgt daher:

$$\nu_{n+1}\,dS_M = d\lambda_n \quad \text{und} \quad \nu_j\,dS_M = -\frac{\partial h}{\partial x_j}\,d\lambda_n \text{ für } j=1,\dots,n. \tag{18}$$

Zum Beweis von (17) unterscheiden wir nun zwei Fälle.

• Fall $j := n+1$: Wir rechnen mit dem Hauptsatz nach:

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\,d\lambda_{n+1} &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_U \underbrace{\left(\int_a^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,d\lambda_1(y)\right)}_{=f(x,h(x))-f(x,a)} d\lambda_n(x)\\ &= \int_U f\big(x,h(x)\big)\,d\lambda_n(x) \overset{(18)}{=} \int_M f\nu_{n+1}\,dS_M.\end{aligned}$$

• Fall $1 \le j \le n$: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi\colon U\times I \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \int_a^y f(x,\eta)\,d\eta.$$

Nach dem Satz aus Analysis 2 über das Differenzieren unterm Integral (beachte $f \in C^1$) gilt zunächst

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\eta)\,d\eta \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Bei Einsetzen von $y = g(x)$ ergibt daher die Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^{h(x)} f(x,y)\,dy &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\Phi\big(x,h(x)\big)\Big) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\big(x,h(x)\big) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\big(x,h(x)\big)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)\\ &= \int_a^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy + f\big(x,h(x)\big)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\end{aligned} \tag{19}$$

Wir müssen diese Formel noch über U integrieren. Der Träger von $x \mapsto \int_a^{h(x)} f(x,y)\,dy$ ist kompakt in U enthalten. Aus Lemma 10(i) folgt deshalb

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x_j}\biggl(\int_a^{h(x)} f(x,y)\,dy\biggr) d\lambda_n(x) \overset{(14)}{=} 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,d\lambda_{n+1}(x) &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_U \biggl(\int_a^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy\biggr) d\lambda_n(x)\\ &\overset{(19)}{=} \int_U \frac{\partial}{\partial x_j}\biggl(\int_a^{h(x)} f(x,y)\,dy\biggr) d\lambda_n(x) - \int_U f\bigl(x,h(x)\bigr)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)\,d\lambda_n(x)\\ &\overset{(18)}{=} \int_M f\nu_j\,dS_M.\end{aligned}$$

□

Beachten Sie, dass wir im vorstehenden Beweis in beiden Fällen nur den Satz von Fubini und den Hauptsatz verwendet haben, wobei im zweiten Fall der Hauptsatz durch das Lemma eingangen ist.

Bemerkung. Man kann ein entsprechendes Lemma über *Bigraphen* beweisen, d.h. man ersetzt A durch die Menge zwischen zwei Graphen $A := \Bigl\{(x,y) \in U \times I : g(x) \le y \le h(x)\Bigr\}$, wobei $h - g \ge 0$ gelten soll.

Wir wollen nun Satz 9 im allgemeinen beweisen. Dazu wollen wir M in Einzelgebiete zerlegen, auf denen wir die lokale Version verwenden können.

Lemma 12 (Lebesguesches Überdeckungslemma). *Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ einer kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert $\lambda > 0$, genannt* Lebesguesche Zahl der Überdeckung*, so dass für jedes $x \in A$ der Ball $B_\lambda(x)$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Indirekt: Wenn nicht, dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$, so dass $B_{1/k}(x_k)$ in keinem U_i enthalten ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß können wir für eine Teilfolge der x_k annehmen, dass sie gegen ein $x_0 \in A$ konvergiert; wir nehmen an, dass dies x_k selbst ist.

Zu $x_0 \in A$ gibt es aber einen Index $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gilt sogar $B_\varepsilon(x_0) \subset U_i$ für ein $\varepsilon > 0$. Wegen $x_k \to x_0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|x_k - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \ge k_0$. Aber dann ist auch $B_{\varepsilon/2}(x_k) \subset U_i$ für alle $k \ge k_0$, Widerspruch zur Annahme. □

Zum Beweis des Gaußschen Integralsatzes benötigen wir ein in der Mathematik des 20 Jahrhunderts oft benutztes Werkzeug, mit dem man globale Aussagen auf den lokalen Fall zurückspielen kann:

Definition. Eine *glatte Zerlegung der Eins* ist eine für jedes $\varepsilon > 0$ definierte Familie von Funktionen

$$\{\psi_{\varepsilon,b} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\, [0,\infty)) : b \in I\}, \tag{20}$$

wobei $I := I(\varepsilon, n) := \varepsilon\mathbb{Z}^n$, für die gilt:
- $\sum_{b\in I} \psi_{\varepsilon,b}(x) = 1$ und
- $\operatorname{supp} \psi_{\varepsilon,b} \subset W_\varepsilon(b)$.

In den Übungen konstruieren Sie eine solche Familie. Es gibt verschiedene Varianten von Partitionen der Eins. Gemeinsam ist aber stets, dass die Summe von Funktionen 1 ist, und dass in jedem x nur endlich viele Summanden nicht verschwinden.

Beweis des Gaußschen Integralsatzes. Nach dem Satz für implizite Funktionen besitzt jeder Punkt $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, in der sich ∂A als Graph einer Funktion darstellen lässt und $A \cap U$ als die Menge der Punkte, die unter diesem Graphen liegen. Die kompakte Menge ∂A wird sogar von endlich vielen solcher Mengen überdeckt. Es existiert deshalb eine endliche Familie $(U_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$, so dass jedes U_j wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(*i*) *Innerer Fall*: $U_j \subset A \setminus \partial A$.
(*ii*) *Randfall:* Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten gilt

$$U_j \cap A = \Big\{(x, y) \in U \times (a, b) : y \le g(x)\Big\},$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, und $g \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Es sei

$$B := \{b \in I : \operatorname{supp} \psi_{\varepsilon,b} \cap A \neq \emptyset\}$$

die Menge der Gitterpunkte, für die der Träger der Funktionen noch A schneidet. Da A beschränkt ist, ist B eine endliche Menge.

Nach Lemma 12 besitzt die Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ des Kompaktums A eine Lebesguesche Zahl λ. Zu $\varepsilon := \frac{\lambda}{\sqrt{n+1}}$ betrachten wir die Zerlegung der Eins $(\psi_{\varepsilon,b})_{b\in I}$ von (20). Gegebenenfalls nach weiterer Verkleinerung von ε können wir annehmen, dass jede Funktion $\psi_{\varepsilon,b}$ mit $b \in B$ ihren Träger noch ganz in $\bigcup U_j$ hat.

Der Träger jeder Funktion $\psi_{b,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε. Dieser Würfel liegt in einem Ball, dessen Radius die halbe Diagonalenlänge $\varepsilon\sqrt{n+1} = \lambda$ ist. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungslemma ist deshalb jeder Träger $W_\varepsilon(b) = \operatorname{supp} \psi_{\varepsilon,b}$ in einer der Mengen U_j enthalten.

Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um den Gaußschen Integralsatz auf die Fälle zurückzuführen, wo sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Es ist einerseits

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_{n+1} = \int_A \operatorname{div}\Big(\sum_{b\in B} \psi_{\varepsilon,b} F\Big) d\lambda_{n+1} = \sum_{p\in B} \int_A \operatorname{div}\big(\psi_{\varepsilon,b} F\big) d\lambda_{n+1}$$

und andererseits

$$\int_{\partial A} \big\langle F, \nu \big\rangle \, dS_{\partial A} = \sum_{p\in B} \int_{\partial A} \big\langle \psi_{\varepsilon,b} F, \, \nu \big\rangle \, dS_{\partial A}.$$

Wir beweisen nun den Satz, indem wir für jeden Summanden die Gleichheit der Integrale rechts nachweisen. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $b \in B$ der Träger von $\psi_{\varepsilon,b}$ in einer der Mengen U_j enthalten.

Im Fall (i) zeigt Lemma 10(ii), dass

$$\int_A \operatorname{div}(\psi_{\varepsilon,b} F) \, d\lambda_{n+1} = 0 = \int_{\partial A} \big\langle \psi_{\varepsilon,b} F, \, \nu \big\rangle \, dS_{\partial A},$$

denn $\psi_{\varepsilon,b} F$ hat kompakten Träger in $\operatorname{int} A$.

Im Fall (ii) folgt die Behauptung durch Anwendung von Lemma 11 auf $\psi_{\varepsilon,b} F$. □

`14. Vorlesung, Mittwoch 18.6.08` ______________________________________

Bemerkungen. 1. Man kann zeigen, dass der Gaußsche Integralsatz auch noch für Kompakta gilt, deren Rand niederdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweist.

2. Physiker beweisen den Satz mithilfe einer Zerlegung in kleine Würfel. Auf jedem Würfel gilt der Gaußsche Satz, das hatten wir –wenigstens für $n = 2$– ja bereits gesehen. Die Randintegrale $\int \langle F, \nu \rangle dS$ heben sich aber für benachbarte Würfelflächen auf, weil auf diesen ν verschiedenes Vorzeichen hat. Es bleiben also Würfelflächen am Gebietsrand über; sie ergeben irgendwie das Randintegral $\int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS$. Unser Beweis mithilfe einer Partition der Eins ist eigentlich nur die saubere mathematische Formulierung dieses Ansatzes.

3. Unser Beweis hat drei Kernpunkte:
• Der eindimensionale Hauptsatz wird mit dem Satz von Fubini hochintegriert. Weil man dabei auf einen schiefen Rand trifft, muss man das Flächenmass einsetzen; dies erklärt den Term $F_i \nu_i dS$.
• Man summiert über alle Koordinatenrichtungen.
• Um auf die globale Version zu kommen, benutzt man die Partition der Eins. Dies funktioniert, weil beide Seiten des Gaußschen Satzes linear im Vektorfeld F sind.

3.4. **Greenscher Integralsatz in der Ebene.** Wir wollen nun den Gaußschen Integralsatz speziell in Dimension 2 betrachten. Wenn wir für das Randintegral die Schreibweise von Kurvenintegralen, $\int_\gamma X \cdot ds = \int_a^b \langle X \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \, dt$, benutzen, so erhalten wir:

Satz 13 (Greenscher Integralsatz)**.** *Beranden die regulären geschlossenen einfachen Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_m\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ auf der linken Seite eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand, so gilt für jedes $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $A \subset U$:*

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_2 = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot ds \tag{21}$$

Dabei haben wir folgende Begriffe verwendet: Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve.
• γ heißt *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.
• γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist. In unserer Situtation ist γ sogar periodisch fortsetzbar zu einer glatten Kurve auf $\mathbb{R}$.
• Die geschlossene Kurve γ heißt *einfach*, wenn γ eingeschränkt auf $[a,b)$ injektiv ist (keine Doppelpunkte hat).
• Um zu erklären, wann eine ebene reguläre Kurve γ das glatt berandete Kompaktum A auf der *linken Seite* berandet, betrachten wir die orientierte 90°-Drehung in der Ebene, $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es soll dann gelten $J\nu \circ \gamma = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$, wobei ν die äußere Normale an A ist.

Beweis. Als orthogonale Abbildung ist J Isometrie, d.h. $\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. In Dimension zwei können wir deshalb das Randintegral des Gaußschen Integralsatz umformen zu

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_2 = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial A} \langle JF, J\nu \rangle \, dS.$$

Nun verwenden wir die Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten: Abgesehen von der aus m Punkten bestehenden Nullmenge $\{\gamma_i(0) = \gamma_i(1) : i = 1, \ldots, m\} \subset \partial A$ wird der Rand ∂A durch die m Immersionen $\gamma_i\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\int_{\partial A} \langle JF, J\nu \rangle \, dS = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \langle JF \circ \gamma, J\nu \circ \gamma \rangle \, \|\gamma_i'\| \, dt = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \big\langle JF(\gamma(t)), \gamma_i'(t) \big\rangle \, dt,$$

wobei rechts gerade das behauptete Kurvenintegral steht, denn $JF = \left(\begin{smallmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{smallmatrix}\right)$. □

Hier ist eine biographische Bemerkung über George Green (1793-1841).
He worked fulltime in his father's bakery from the age of nine and taught himself mathematics from library books. In 1828 he published privately *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, but only 100 copies were printed and most of those went to his friends. This pamphlet contained a theorem that is equivalent to what we know as Green's Theorem, but it didn't become widely known at that time. Finally, at age 40, Green entered Cambrigde University as an undergraduate but died four years after graduation. In 1846 William Thompson (Lord Kelvin) located a copy of Green's essay, realized its significance, and had it reprinted. Green was the first person to try to formulate a mathematical theory of

electricity and magnetism. His work was the basis for the subsequent electromagnetic theories of Thomson, Stokes, Rayleigh and Maxwell.

Bemerkungen. 1. Man schreibt auch $\int_{\gamma_i} F \times ds$ oder $\int_{\gamma_i} -F_2\,dx + F_1\,dy$ für die Integrale auf der rechten Seite von (21).

2. Tatsächlich kann man sich überzeugen, dass jedes Kompaktum in $\mathbb{R}^2$ mit glattem Rand von m geschlossenen Kurven berandet wird. Hinter dieser Aussage steckt allerdings die nur scheinbar offensichtliche Feststellung, dass jede Zusammenhangskomponente einer kompakten 1-Mannigfaltigkeit homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist (Beweis siehe Anhang von [GP]). Benutzt man dies und vereinigt man gegebenenfalls mehrere Karten von ∂A, so kann man jede Zusammenhangskomponenten von ∂A mit einer geschlossenen Kurve parametrisieren.

Beispiel. Bei Wahl von $F(x) = x$ mit $\operatorname{div} F = 2$ erhalten wir eine Formel, die den Flächeninhalt als ein Randintegral ausdrückt (wir nehmen an ∂A wird von nur einer Kurve γ links berandet):

$$\lambda_2(A) = \frac{1}{2}\int \langle \gamma, -J\gamma' \rangle\, dt = \frac{1}{2}\int \gamma \times \gamma'\, dt.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass die Vorzeichen stimmen, indem Sie die Formel am Einheitskreis überprüfen. Interpretieren Sie das Integral elementargeometrisch als die Integration der orientierten Inhalte von infinitesimalen Dreiecken.

Natürlich kann man auch im allgemeinen das $(n+1)$-dimensionale Volumen eines Kompaktums als Randintegral schreiben: Der Gaußsche Integralsatz mit $F(x) := \frac{1}{n+1}x$ liefert eine solche Formel.

Bemerkungen. 1. Wir haben zwei klassische Integralsätze besprochen. Es gibt noch einen dritten, den Satz von (Kelvin-)Stokes, der die Rotation enthält.
2. Sämtliche klassischen Integralsätze folgen aus der allgemeinen Version des Hauptsatzes in mehreren Veränderlichen, der (allgemeinen) Stokesschen Formel

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Auch sie drückt das Integral einer Differentialform ω über den Rand einer Mannigfaltigkeit M aus durch das Integral über ihre Ableitung $d\omega$ auf ganz M. Differentialformen sind fußpunktabhängige Kotangentialvektoren, und d ist ein Ableitungsoperator, der aus einer Differentialform eine andere macht. Differentialformen kann man sich vorstellen als Linearkombinationen von Oberflächenelementen.

`Ende der Vorlesung` ____

Index