Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
18./19. Juni 2008

12. Übungsblatt zur „Analysis IV: Integration“

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Flächenintegral)
Sei $a > 0$. Berechnen Sie das folgende Flächenintegral

$$\int_M y^2 z \, dS_M$$

mit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$,

Aufgabe G34 (Volumenberechnung)
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand. Wir betrachten nun einen Kegel der Höhe $h > 0$ über B

$$K := \{(tx, -ht) \subset \mathbb{R}^{n+1} : x \in B, t \in [0, 1]\},$$

mit Spitze in $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Berechnen Sie das Volumen von K auf zwei verschiedene Weisen:

(i) mit dem Cavallierischen Prinzip,

(ii) mit dem Gaußschen Integralsatz (Sie dürfen den Satz ohne weitere Diskussion benutzen, da ∂K abgesehen von einer Nullmenge glatt ist).

Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Volumen eines Kegels im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G35 (Partition der Eins)
Betrachten Sie die Funktion $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\xi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{für } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(i) Berechnen Sie $\xi'(1)$.

Für das Folgende dürfen Sie $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ voraussetzen. Ferner betrachten wir zu $\varepsilon > 0$ und $b \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$\varphi_{\varepsilon,b}(x) := \xi\left(\frac{1}{\varepsilon}\|x - b\|\right), \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

(ii) Skizzieren Sie für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ die Träger von $\varphi_{\varepsilon,b} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ für einige $b \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Warum gilt

$$\Phi_\varepsilon(x) := \sum_{b \in \varepsilon\mathbb{Z}^2} \varphi_{\varepsilon,b}(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \ ?$$

Wir setzen nun

$$\psi_{\varepsilon,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad \psi_{\varepsilon,b}(x) := \frac{\varphi_{\varepsilon,b}(x)}{\Phi_\varepsilon(x)}\,.$$

(iv) Zeigen Sie,

$$\sum_{b\in\varepsilon\mathbb{Z}^2} \psi_{\varepsilon,b}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2\,,$$

d.h. die Funktionenfamilie $\{\psi_{\varepsilon,I} : I \in \varepsilon\mathbb{Z}^2\}$ bildet eine Partition der Eins.

(v) Beweisen Sie, dass der Raum $C_c(\mathbb{R}^2)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger bzgl. der L^∞-Norm dicht im Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ liegt, d.h.

$$\forall\sigma > 0,\, \forall f \in C_c(\mathbb{R}^2)\, \exists\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) : \quad ||f-\varphi||_\infty < \sigma.$$

(vi) Lässt sich diese Konstruktion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen?

Hausübung

Aufgabe H33 (Zweidimensionales Volumen)
Berechnen und skizzieren Sie das 2-dimensionale Volumen von M.

(i) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, a \le x \le b\}$, wobei $-1 \le a < b \le 1$ gilt.

(ii) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, wobei $0 < b \le a$ gilt.

Aufgabe H34 (Flächeninhalt durch Verdickung)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Immersion. Weiter sei $\nu\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein glattes Einheitsnormalenfeld an die Immersion, d.h. es gelte $\nu(x) \perp \{\partial_1\phi(x),\dots,\partial_n\phi(x)\}$ und $\|\nu(x)\| = 1$ für alle $x \in U$. Wir betrachten nun die *Verdickung* von φ,

$$\Phi\colon U\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \Phi(x,t) := \varphi(x) + t\nu(x).$$

i) Für jede Menge $A \subset U$, deren Abschluss $\overline{A}$ kompakt sei, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die Verdickung $\Phi\colon A\times(-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion ist.

ii) Für $A \subset U$ mit $\overline{A}$ kompakt wie zuvor betrachten wir nun eine messbare Teilmenge $E \subset A$. Mit Hilfe des Grenzwerts des Volumens der Verdickung definieren wir

$$T_\varphi(E) := \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}S_\Phi\big(E\times(-\tau,\tau)\big) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{E\times(-\tau,\tau)}\sqrt{\det g_\Phi(x,t)}\,d\lambda_{n+1}(x),$$

wobei nur $0 < \tau < \epsilon$ betrachtet werden soll. Zeigen Sie, dass $T_\varphi(E)$ mit dem n-dimensionalen Volumen $S_\varphi(E)$ der Immersion φ übereinstimmt.
Tipp: Wenn Sie geschickt argumentieren, benötigen Sie nur für $t = 0$ eine Rechnung.

iii) *Zusatz:* Überlegen Sie, wie man dieses Verfahren zur Ermittlung des Oberflächenmasses auf beliebige Kodimension übertragen kann.

Aufgabe H35 (Knobelaufgabe)
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, einen Kreis vom Durchmesser 100 mit 99 Streifen der Breite 1 zu überdecken. (Die Streifen sind abgeschlossen und unendlich lang.)

Tipp: Benutzen Sie, dass das Ergebnis aus HÜ 33 (i) nur von der Differenz $b-a$ abhängt.

Die kleine e-Funktion

In die Welt, mit wichtiger Mission
Zog Leonhard die kleine e-Funktion

Um zu zeigen, einwandfrei
Seine Ableitung er selber sei.

Wer konnt' ihm helfen? Wer denn bloß?
Logarithmus naturalis zweifellos.

Doch dieser hatte keine Lust.
Drum sprach er nur aus lauter Frust.

"Verschwinde bloß und weich
Meinem Definitionsbereich!

Sonst wirst du so oft differenziert
Bis du als 0-Funktion bist liquidiert!"

Doch Leonhard sprach voller Hohn:
"Mach doch! Ich bin hier die e-Funktion.

Ableiten? Weißt du denn wie?
Suchst du die 0, du find'st sie nie."

"Bist sehr mutig, kleiner Wicht
Doch bewiesen ist's noch lange nicht."

"Ich will's dir zeigen, ohne Tricks.
Bin ich in dir, gibt das wohl x.

Die Gleichung schnell differenziert.
Einmal Kettenregel zelebriert.

e^x noch auf die andre Seit'
Und schon sind wir all gescheit!"

Logarithmus war total schockiert
Fühlte sich nicht definiert.

"Also gut, ich seh' es ein,
Der Beweis ist lupenrein.

Es ist schon ein genialer Coup
Die eig'ne Ableitung bist du!"

Vielen Dank an Florian für's Zuschicken. Wenn nächste Woche wieder was auf dem Zettel stehen soll, schickt ne Mail an plehnert@mathematik.tu-darmstadt.de!