Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
11./12. Juni 2008

11. Übungsblatt zur „Analysis IV: Integration“

Gruppenübung

Aufgabe G30 (Divergenz und Vektorfelder)

Finden und skizzieren Sie jeweils ein Vektorfeld $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i)

$$\mathrm{div} F \begin{cases} > 0, & \text{für } \; y > 0 \\ < 0, & \text{für } \; y < 0. \end{cases}$$

(ii) $F(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $F \not\equiv \text{const}$ und $\operatorname{div} F = 0$.

Aufgabe G31 (Laplace-Operator)

(i) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$

(ii) Sei nun $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) \, d\lambda_n(x) = 0$$

gilt.

(iii) Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. Skizzieren Sie den Gradienten und interpretieren Sie die Bedeutung von Δf.

Aufgabe G32 (Gaußscher Integralsatz)

Wir betrachten die Menge $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \qquad F(x, y, z) \; := \; \big(x^2y^3, \, xz + xy^4, \, \cos(xy)\big) \, .$$

(i) Zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

(ii) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \big\langle F(x, y, z), \, \nu(x, y, z) \big\rangle \, dS_{\partial K}(x, y, z) \, ,$$

wobei $\nu \colon \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von K ist.

Beachten Sie, dass wir ν gar nicht explizit ausrechnen müssen!

Hausübung

Aufgabe H30 (Volumen der Einheitssphäre)

Berechnen Sie das Volumen ω_n der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ in Abhängigkeit des n-dimensionalen Volumens des Einheitsballs $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ mit dem Zwiebelsatz.

Bemerkung: Es gilt

$$\mathrm{vol}_n(B_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

wobei die Gamma-Funktion durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ für alle $x \in (0,\infty)$ definiert wird.

Aufgabe H31 (Divergenz)

(i) Es sei $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y-x|| < r\}$ der offene Ball vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$. Weiter bezeichne $\nu : \partial B_r(x) \to \mathbb{R}^n$ sein äußeres Einheitsnormalenfeld.

Zeigen Sie, dass für ein stetiges differenzierbares Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathrm{div} F(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} \langle F, \nu \rangle \, dS.$$

(ii) Sei nun allgemeiner $(A_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Kompakta mit glattem Rand, die alle den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ enthalten. Für jedes A_k gilt die folgende Eigenschaft:

Für jede Folge $x_k \in A_k(x)$ gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Zeigen Sie auch für diesen Fall, dass die Behauptung aus (i) gilt.

Aufgabe H32 (Prinzip von Archimedes)

Sei $K \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂K und äußerem Einheitsnormalenfeld $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$, $x \in \partial K$.

Wir deuten K als einen Körper, der sich in einer Flüssigkeit konstanter Dichte mit der Oberfläche $\{x_3 = 0\}$ befindet. Der Körper erfährt dann die Auftriebskraft

$$F = (F_1, F_2, F_3) = c \int_{\partial K} x_3 \nu(x)\, dS \quad \in \mathbb{R}^3$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

Zeigen Sie unter Benutzung des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad \text{und} \quad F_3 = c\, \mathrm{vol}(K).$$

e^x und 'ne Konstante bummeln zusammen über'n Broadway.
Sie sehen von weitem 'nen Differential-Operator.
Konstante: 'Du, ich mach mich mal schnell vom Acker...'
e^x: [leicht überheblich] 'Höhöhö - ICH bin e^x!'
Der Differential-Operator kommt näher, die beiden treffen sich.
e^x: [selbstbewußt] 'Hallo, ich bin e^x!'
Differential-Operator: [grinsend] 'Und ich bin $\frac{d}{dy}$...'