Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
4./5. Juni 2008

10. Übungsblatt zur „Analysis IV: Integration“

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Zum Warmwerden)

(a) Gibt es ein $p \geq 0$, für welches das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n , \quad F(x) := \frac{x}{\|x\|^p} ,$$

divergenzfrei ist?

(b) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen von

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 = 1\}.$$

Aufgabe G28 (Bohrung)

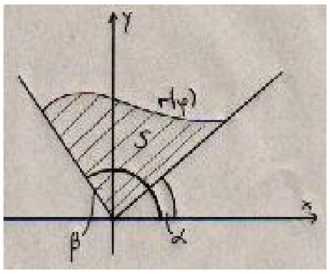
Bestimmen Sie das Volumen der Menge, die aus einer Kugel mit dem Radius $2a$ herausgebohrt wird, wenn das Loch den Radius a hat und die Achse des Lochs ein Durchmesser der Kugel ist. (Skizze!)

Aufgabe G29 (Leibnizsche Sektorformel)

(i) Es seien $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Der Sektor S sei der abgeschlossene Bereich, der berandet wird von zwei Ursprungsgeraden mit Winkel α und β, sowie der in Polarkoordinaten gegebenen Kurve $r = r(\varphi)$.

Beweisen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(S)$ dieses Sektors gilt

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 \, d\varphi.$$



(ii) Skizzieren Sie die in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ gegebene Spiralkurve

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des von ihr eingeschlossenen Sektors.

Hausübung

Aufgabe H27 (Clifford-Torus)

Wir betrachten die folgende Menge

$$T := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 : ||z||^2 = ||w||^2 = 1\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) Geben Sie eine parametrische Beschreibung an.

Tipp: Wie parametrisiert man $\{z \in \mathbb{C} : ||z||^2 = 1\}$?

(iii) Berechnen Sie den Flächeninhalt von T.

(iv) **Zusatzaufgabe:** Finden Sie eine 2-dimensionale Untergruppe von $\mathsf{SO}(4)$, die T invariant lässt.

Tipp: Welche Gruppe lässt $\mathbb{S}^1$ invariant?

Aufgabe H28 (Wiederholung Maße)

Sei (X, Σ) ein messbarer Raum und μ_k seien Maße auf Σ. Wir setzen voraus, dass für jedes $A \in \Sigma$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$ existiert und bezeichnen den Grenzwert mit $\mu(A)$. Damit ist eine Funktion $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass μ nicht-negativ und endlich additiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass μ nicht unbedingt ein Maß ist. Dazu sind folgende Aussagen zu beweisen:

(a) Sei $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ nicht-negativ und endlich additiv ist, aber kein Maß.

(b) Geben Sie eine Folge von Maßen μ_k an, so dass für jedes $A \in \Sigma$ gilt $\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$.

(c) Aus (a) und (b) schließen Sie (ii).

(iii) **Zusatzaufgabe:** Beweisen Sie, dass die Funktion μ in (i) immer ein Maß ist, falls $\mu(X) < +\infty$ gilt.

Aufgabe H29 (Der Zwiebelsatz)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den *Zwiebelsatz* zu beweisen:

Sei $n \geq 2$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist für fast jedes $r > 0$ die Funktion f über der Sphäre $\mathbb{S}_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} f(x) dS_{\mathbb{S}_r^{n-1}}(x) \, dr = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} f(ry) \, dS_{\mathbb{S}_1^{n-1}}(y) \, r^{n-1} \, dr. \tag{1}$$

(i) Warum genügt es, die Behauptung für jede der beiden Funktionen $f\chi_{H_+}$ und $f\chi_{H_-}$ zu zeigen? Wobei $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$.

(ii) Wir betrachten $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| < 1\}$ und die Abbildung

$$\Phi : U \times (0, \infty) \to H_+ \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \ \ (x, r) \mapsto \Big(rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2}\Big).$$

Zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus ist.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\det\, J_\Phi(x,r) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-||x||^2}}.$$

Hinweis: Sei $F(x) := \sqrt{1-||x||^2}$ und betrachten Sie $\Phi(x,r) = r(x, F(x))$.

(iv) Beweisen Sie den Satz für $\int_{H_+} f \, d\lambda_n(x)$.

Schon gewählt?
Hochschulwahlen noch bis Donnerstag!!!