Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
28./29. Mai 2008

9. Übungsblatt zur „Analysis IV: Integration“

Gruppenübung

Aufgabe G25 (Tangential- und Normalraum)
Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Tangential- und des Normalraumes zu folgenden Parametrisierungen.

(i) *Archimedische Spirale*

$$c\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\,,\quad c(t)=(t\cos t, t\sin t)$$

(ii) *Schraubkurve* oder *Helix*

$$c\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\,,\quad c(t)=(\cos t, \sin t, t)$$

(iii) *Wendelfläche* oder *Helikoid*

$$\varphi\,:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\,,\quad \varphi(s,t)=(s\cos t, s\sin t, t)$$

Skizzieren Sie diese Kurven bzw. die Fläche.

Aufgabe G26 (Kompakta mit glattem Rand und Rotationskörper)
Es sei $A\subset(0,\infty)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand und

$$K\;:=\;\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\left(\sqrt{x^2+y^2},\,z\right)\in A\right\}$$

der durch Rotation von $\{0\}\times A$ um die z-Achse entstehende Rotationskörper.

(a) Zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Kreisscheibe $A:=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\colon(y-5)^2+z^2\le 1\}\subset\mathbb{R}^2$ und der Volltorus $K:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon(\sqrt{x^2+y^2},\,z)\in A\right\}\subset\mathbb{R}^3$ Kompakta mit glattem Rand sind.

Aufgabe G27 (Kurven)
Sei $c:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ eine Kurve.

(i) Unter welchen Bedingungen ist c eine Immersion?

Im folgenden setzen wir dies voraus.

(ii) Berechnen Sie die erste Fundamentalform und die Gramsche Determinante. Was ist die Länge der Kurve, d.h. ihr eindimensionales Volumen?

(iii) Berechnen Sie die Länge der Spiralkurve

$$c(t):=(t\cos t, t\sin t),\quad t\in(0,4\pi).$$

Hinweis zur Substitution: $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$

Hausübung

Aufgabe H25 (Sphärische Koordinaten)
Wir betrachten folgende Parametrisierung der Sphäre:

$$S : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta).$$

(i) Skizzieren Sie das Bild S^2 und tragen Sie die Tangentialvektoren $\frac{\partial S}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ für die beiden Punkte $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ und $(\vartheta, \varphi) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ ein.

(ii) Berechnen Sie die erste Fundamentalform $(g_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$.
Was sind die Längen der Vektoren $\frac{\partial S}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ und welchen Winkel schließen sie ein?

(iii) Berechnen Sie die Determinante $\det g$. Erklären Sie das Verhalten der Determinante für $\vartheta \to \pm\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe H26 (Flächeninhalt von Rotationsflächen)
Sei

$$c\,:\,(a, b) \to \mathbb{R}^3\,, \quad c(t) = (r(t), 0, z(t)),$$

eine stetig differenzierbare Kurve in der $[x, z]$-Ebene. Es gelte $r(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$. Unter Rotation um die z-Achse erzeugt c die *Rotationsfläche*

$$\varphi(t, \alpha) = (r(t)\cos\alpha, r(t)\sin\alpha, z(t)),$$

die durch t und den Drehwinkel $\alpha \in \mathbb{R}$ parametrisiert ist.

(i) Zeigen Sie, daß φ genau dann eine Immersion ist, wenn auch c eine Immersion ist.

(ii) Berechnen Sie die erste Fundamentalform, und begründen Sie, daß die t- und α-Linien der Fläche zueinander orthogonal sind, d.h. ihre Tangentialvektoren stehen stets senkrecht aufeinander.

(iii) Berechnen Sie die Gramsche Determinante der Abbildung φ.

(iv) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Rotationsfläche $\{\varphi(t, \alpha)\,:\, a < t < b,\ 0 < \alpha < 2\pi\}$ auf.

(v) Berechnen Sie speziell den Flächeninhalt des *Torus,* der vom Kreis

$$c(t) = (R + r\cos t, 0, r\sin t), \quad 0 < r < R,$$

erzeugt wird (wieder für $0 < \alpha < 2\pi$).

Aufgabe H27 (Volumen- und Integralbestimmung)
Es seien A eine positiv definite symmetrische $(n \times n)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = f(x_1, ..., x_n) := \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

(a) Bestimmen Sie das Volumen des durch $f(x) \le 1$ beschriebenen Ellipsoids, also

$$\lambda(\{x\,:\,f(x) \le 1\}).$$

Hierbei darf das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel als bekannt angenommen werden.

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$?

(c) Berechnen Sie auch das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}\,dx.$$