Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
21. Mai 2008

8. Übungsblatt zur „Analysis IV: Integration“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Transformationsformel)
Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx.$$

Hinweis:

(i) Werten Sie einerseits das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \qquad (*)$$
unter Verwendung von Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ aus.

(ii) Wenden Sie andererseits auf $(*)$ den Satz von Fubini an.

Aufgabe G23 (Untermannigfaltigkeiten)
Veranschaulichen Sie sich folgende Mengen und entscheiden Sie, welche dieser Mengen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$

(vi) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$

(vii) $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup \{(0, y, 1) : y \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe G24 (Hyperbolisches Paraboloid)
Wir betrachten den Graphen der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = xy$.

(i) Skizzieren Sie den Graphen.

(ii) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$ eine Immersion ist.

(iii) Geben Sie den Normal- und Tangentialraum von φ an.

(iv) Stellen Sie den Graphen implizit dar.

Hausübung

Aufgabe H22 (Cavalierisches Prinzip)

Das Cavalierische Prinzip lautet:

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ meßbar und für $y \in \mathbb{R}^m$ sei $M_y := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, (x,y) \in M\}$. Dann ist M_y meßbar, die Funktion $y \mapsto \lambda_n(M_y)$ ist meßbar und es gilt

$$\lambda_{n+m}(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y)\, d\lambda_m(y). \qquad (*)$$

(i) Wir betrachten zuerst ein Beispiel, und zwar die Pyramide aus der Hausübung H01. Wie würden Sie die Mengen M_y wählen?

Berechnen Sie mit Hilfe von $(*)$ erneut das Volumen der Pyramide und vergleichen Sie es mit Ihrem früheren Ergebnis.

(ii) Beweisen Sie $(*)$ unter Verwendung des Satzes von Fubini.

Aufgabe H23 (Untermannigfaltigkeiten)

Die Funktionen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\psi_1(x,y,z) := x^2 + xy - y - z, \quad \psi_2(x,y,z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \psi_1(x,y,z) = \psi_2(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(t) \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

die Menge M parametrisiert. Überprüfen Sie schließlich durch Berechnen von $\operatorname{rang} d\varphi$, dass die Abbildung φ eine Immersion ist.

Aufgabe H24 (Möbiusband)

(i) Skizzieren Sie im dreidimensionalen Koordinatensystem den Einheitskreis

$$c(\alpha) := (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tragen Sie einige nach außen gerichtete Normalenvektoren $c(\alpha)$ ein.

Mit dem Einheitsvektor $e_3 := (0,0,1)$ und einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$ betrachten wir das *Möbiusband*

$$\varphi(\alpha, t) := c(\alpha) + t\left(\sin\frac{\alpha}{2}\, c(\alpha) + \cos\frac{\alpha}{2}\, e_3\right), \quad \varphi \,:\, \mathbb{R} \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^3\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass das Möbiusband eine Immersion ist.

(iii) Was ist $t \mapsto \varphi(\alpha, t)$? Tragen Sie eine dieser Kurven in die Skizze aus (i) ein.

(iv) Zeigen Sie, dass diese Fläche geschlossen ist, d.h. es gilt

$$\varphi(\alpha, t) = \varphi(\alpha + 2\pi, -t).$$

Beachten Sie den Vorzeichenwechsel in t: das Möbiusband ist *einseitig*. Dies wollen wir noch einmal explizit zeigen. Dazu betrachten wir den Vektor

$$\nu(\alpha) := \cos\frac{\alpha}{2}\, c(\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2}\, e_3\,.$$

(v) Zeigen Sie, dass $\nu(\alpha)$ im Punkt $\varphi(\alpha, 0)$ senkrecht auf dem Möbiusband steht. Zeigen Sie dann

$$\nu(0) = -\nu(2\pi).$$

Wie oft rotiert ν in der von $c(\alpha)$ und e_3 aufgespannten Ebene, wenn α von 0 bis 2π läuft?

Das Möbiusband ist eine geschlossene, aber einseitige Fläche im $\mathbb{R}^3$. Basteln Sie aus einem Streifen Papier ein Modell einer Möbiusfläche!