Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
14.05.2008

Analysis IV: Integration

7. Übung

G19 Der Raum $\mathbf{L^1}$

i) Der Raum der stetigen Funktionen ist nicht vollständig unter der $\mathcal{L}^1$-Norm. Um dies zu zeigen, finde eine Folge stetiger Funktionen $f_1, f_2, \ldots : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass

* $\int_{[0,1]} |f_n - f| \, d\mu \to 0$
* $f \notin C^0([0,1])$.

ii) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ repräsentiere eine Klasse $[f] \in L^1(\mathbb{R})$. Was ist auf der Klasse $[f]$ wohldefiniert?

a) $f(0)$ b) $\sup f$ c) $\{x\colon f(x) > 0\}$ d) $\mu\big(\{x\colon f(x) > 0\}\big)$
e) $[\,|f|\,] \in L^1$ f) $[\frac{1}{f}] \in L^1$

iii) Wie könnte man ein verallgemeinertes Supremum für L^1-Funktionen definieren? (≤ 5 min)

G20 Schranken

Gegeben seien drei Folgen integrierbarer Funktionen $g_n, h_n, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem Maßraum (X, Σ, μ), die folgende Eigenschaften besitzen:

1. Für alle n und fast alle $x \in X$ gilt $g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$.
2. Für fast alle $x \in X$ konvergieren die Folgen punktweise gegen g, f und h.
3. Die Funktionen g, h sind integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X h \, d\mu, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu \ .$$

Zeige, dass die Funktion f auch integrierbar ist und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \ .$$

Hinweis: Verwende das Lemma von Fatou und zeige damit

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

G21 Konvergenz nach Maß

Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ messbare Funktionen auf (X, Σ_X, μ). Wir sagen die Folge f_n konvergiert *nach Maß* gegen f, geschrieben $f_n \xrightarrow{\mu} f$, falls

$$\forall \epsilon > 0\colon \mu\{x \in X\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \ .$$

i) Seien $X = [0,1]$, $\Sigma_X = \mathcal{B}([0,1])$ und λ das Lebesguemaß. Zeige: Die Folge $f_n := n\chi_{A_n}$ mit $A_n := (0, \frac{1}{n})$ konvergiert nach Maß gegen 0, aber sie konvergiert nicht in L^p.

ii) Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen, sodass $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$. Zeige: $f = g$ fast überall.

iii) Sei $f, f_1, f_2, \ldots \in L^1$. Zeige: $f_n \xrightarrow{L^1} f \;\Rightarrow\; f_n \xrightarrow{\mu} f$. Tipp: Tschebyscheff

iv) Sei (f_n) eine Cauchyfolge in L^1. Zeige: (f_n) ist eine Cauchyfolge nach Maß, d.h.,

$$\forall \epsilon > 0 : \mu\big\{x\colon |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\big\} \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty \ .$$

v) Es läßt sich zeigen, dass eine Folge messbarer Funktionen genau dann nach Maß konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge nach Maß ist. Was sagt das über die Konvergenz nach Maß aus?

H19 Ein Gegenbeispiel zum Satz von Fubini

Betrachte die Funktion

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{0\}.$$

i) Bestimme Teilmengen $D_+ \subset [0,1]^2$ und $D_- \subset [0,1]^2$ mit

$$D_+ := \{x \in [0,1]^2 \,:\, f(x) \geq 0\}, \quad D_- := \{x \in [0,1]^2 \,:\, f(x) < 0\}.$$

ii) Existiert eine stetige Fortsetzung der Funktion f auf die abgeschlossene Menge $[0,1]^2$?

iii) Begründe, dass $f \notin L^1((0,1)^2)$ gilt.
Hinweis: Es ist nicht notwendig, das Integral explizit zu berechnen. Zeige stattdessen

$$\int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \geq \frac{1}{6x},$$

indem du den Nenner des Integranden abschätzt. Werte nun $\int_{[0,1]^2} f_+\,dydx = \int_{D_+} f\,dydx$ aus.

iv) Berechne

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dydx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy.$$

Vergleiche mit dem Satz von Fubini.
Hinweis: Zeige $\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{1+x^2}$ wie folgt: Zerlege zunächst den Integranden in Partialbrüche, d.h. bestimme $A, B \in \mathbb{R}$ im Ansatz

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{Ax^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{B}{x^2+y^2}.$$

Zur Integration betrachte den ersten Summanden auf der rechten Seite. Integriere $\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\,dy$ partiell, und zerlege das Ergebnis wieder in Partialbrüche.

H20 $\mathbf{L^\infty}$ als Limes von $\mathbf{L^p}$

Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar.

i) Zeige $\mathcal{L}^p(X) \supset \mathcal{L}^q(X)$ für $p \leq q$.

ii) Sei $||f||_\infty := \inf\{\alpha \in [0,\infty] \colon |f| \leq \alpha \text{ fast überall}\}$. Zeige: $||f||_p \to ||f||_\infty$ für $p \to \infty$.

iii) Finde für den Fall $\mu(X) = \infty$ ein Beispiel $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $||f||_p \not\to ||f||_\infty$ für $p \to \infty$.

H21 Faltung mit Mollifiern

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion mit kompakten Träger, die $\int_{\mathbb{R}} \phi\,d\lambda = 1$ und $\phi \geq 0$ erfüllt. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion:

$$\phi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{für } t \in (-1,1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ein $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die *Faltung von ϕ mit f*

$$\phi * f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (\phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x-t) f(t)\,d\lambda(t).$$

i) Beweise, daß $\phi * f$ differenzierbar ist, sogar glatt. Nimm dazu f stetig an (die Behauptung ist aber auch noch gültig wenn nur $f \in L^p$). Die Faltung kann man also als Glättung oder Mollifizierung verstehen.

ii) Sei $\phi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\phi(\frac{t}{\delta})$. Skizziere die Graphen $\phi_1, \phi_{\frac{1}{2}}, \phi_{\frac{1}{4}}$ für $\phi(t) = e^{-\frac{1}{1-t^2}}$.

iii) Beweise für wieder allgemeines $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und stetiges f

$$(\phi_\delta * f)(x) \xrightarrow{\delta \to 0} f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Tipp: Substitution
Gilt die Behauptung auch für unstetige f?