Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
30.04.2008

Analysis IV: Integration

5. Übung

T1 Testfragen

i) Entscheide für die folgenden Funktionen, ob sie meßbar sind, ihr Integral auf $\mathbb{R}$ definiert ist oder sie sogar integrierbar (in $\mathcal{L}^1$) sind.

	meßbar	definiert	integrierbar
$x \mapsto 17$			
$x \mapsto \lvert x\rvert$			
$\sin x$			
$1 - \sin x$			

ii) Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $f(x) = g(x)$ für λ-fast alle $x \Rightarrow \int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda$
b) $f(x) = g(x)$ auf einer dichten Teilmenge $\Rightarrow \int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda$
c) $\int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda \Rightarrow f(x) = g(x)$ für alle x
d) $\int f\,d\lambda = \int g\,d\lambda \Rightarrow f(x) = g(x)$ für λ-fast alle x
e) $\int |f-g|\,d\lambda = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ für λ-fast alle x
f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant $\Rightarrow f$ meßbar
g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$.
h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ meßbar bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
i) Für f messbar gilt: $\int f\,d\lambda < \infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1$.
j) $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sup f \in \mathcal{L}^1$.

G13 Grenzwerte von Integralen

Warum existieren die Grenzwerte und was ist ihr Wert ?

$$\text{i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin x}\,d\lambda\,; \qquad \text{ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n\,d\lambda\,.$$

G14 Gleitender Buckel

i) Wir betrachten die Funktionen $f_n := \chi_{[n,n+1]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, daß

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$$

gilt. Warum läßt sich der Satz über die majorisierte Konvergenz nicht auf die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden?

ii) Modifiziere die Konstruktion aus i), um zu zeigen, daß es Funktionenfolgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gibt, die punktweise gegen 0 konvergieren, für die aber gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \infty\ .$$

G15 Integration von Reihen

Zeige: Für meßbare Funktionen $f_k : X \to [0,\infty)$ gilt

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\,d\mu.$$

Hinweis: Benutze den Satz über monotone Konvergenz.

H13 Konvergenzsätze

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Beweise

$$\lim_{k\to\infty} \int_k^{k^2} f(x)\,dx = 0\ .$$

H14 Maße mit Dichten I

Es sei μ ein Maß auf X. Benutze Aufgabe G15, um zu zeigen, daß für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty)$

$$\nu_f(A) := \int\limits_A f\,d\mu \quad \text{für } A \in \Sigma(X)$$

ein Maß auf X ist.

Bemerkung: Man nennt $\nu_f(A)$ das *Maß mit der Dichte* f *bezüglich* μ und schreibt symbolisch

$$d\nu_f = f\,d\mu.$$

Wie wir später zeigen werden, gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Also ist

$$\nu(A) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_A e^{-x^2}\,dx$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß, die sogenannte *Normalverteilung.* Im einfachsten Fall gilt: Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, statt des präzisen Wertes 0 das Meßergebnis x zu erzielen (zeichnen Sie den Graphen der *Gaußschen Glockenkurve* e^{-x^2}). Also gibt für $A \subset \mathbb{R}$ meßbar die Zahl $\nu(A)$ die Wahrscheinlichkeit an, ein Meßergebnis in der Menge A zu erzielen.

H15 Maße mit Dichten II

Die Funktion $f : X \to [0, \infty)$ sei meßbar. Zeige: Dann gilt

$$\int\limits_X h\,d\nu_f = \int\limits_X (hf)\,d\mu$$

für jede meßbare Funktion $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Hinweis: Beweise die Aussage zunächst für den Fall, daß h eine Stufenfunktion ist. Verwende im nächsten Schritt Satz 12 der Vorlesung, um h durch eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen zu approximieren.