Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
23.04.2008

Analysis IV: Integration

4. Übung

G10 Approximation durch Stufenfunktionen

Im Beweis von Satz 12 wurden gewisse Stufenfunktionen s_k definiert, mit denen man eine nicht-negative messbare Funktionen approximieren kann.

i) Skizziere f und die Stufenfunktionen s_1 und s_2 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

ii) Skizziere f und s_1 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + \cos(x)$.

G11 Lebesgue-Integration

i) Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} 1 + \cos x\, d\lambda\,; \quad \int_{[\frac{1}{2},3)} \lfloor x \rfloor\, d\lambda\,.$$

ii) Entscheide, ob das Integral im Sinne der Vorlesung definiert ist und berechnen Sie es in diesem Fall. Ist der Integrand eine integrierbare Funktion?

$$\int_{[-1,2)} \lfloor x \rfloor\, d\lambda\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} \cos x\, d\lambda\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)} - \chi_{[-2,-1]}\, d\lambda\,.$$

G13 Tschebyscheff-Ungleichung

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion. Zeige die folgenden Behauptungen:

i) Für $c > 0$ gilt die Tschebycheffsche Ungleichung

$$\mu(\{|f| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X |f|\, d\mu\,.$$

ii) Es gilt $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

iii) Aus $\int_X |f|\, d\mu = 0$ folgt $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

H10 Stufenfunktionen

Wir betrachten die nicht-negativen messbaren Funktionen $f_1, f_2\colon [0,1] \to [0,\infty)$,

$$f_1(x) \;:=\; x\,; \qquad f_2(x) := 1 - x\,.$$

Da $f_1 + f_2 = 1$, ist dann $s\colon [0,1] \to [0,\infty)$, $s(x) := 1$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $s \leq f_1 + f_2$.

Zeige, dass es keine nicht-negativen Stufenfunktionen $s_1, s_2\colon [0,1] \to [0,\infty[$ gibt derart, dass $s_1 \leq f_1$, $s_2 \leq f_2$ und $s_1 + s_2 = s$.

H11 Uneigentliches Riemann- und Lebesgue-Integral

Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert als die stetige Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{\sin x}{x}\,.$$

i) Skizziere den Graphen von f. Was ist $f(0)$?

ii) Zeige, daß das uneigentliche Riemannsche Integral existiert, d.h.

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\, dx < \infty.$$

Hinweis: Zu hinreichend großem $a \in \mathbb{R}$ wählen Sie $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a - k\pi < \pi$. Betrachten Sie dann für $a \to \infty$ die Zerlegung

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^{\pi} f(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\, dx + \ldots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x)\, dx + \int_{k\pi}^{a} f(x)\, dx.$$

iii) Zeige durch Auffinden geeigneter Stufenfunktionen, daß f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

H12 Absolutstetigkeit

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ meßbar und $\int f\, d\lambda < \infty$. Dann wird durch $\mu(A) := \int_A f\, d\lambda$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert. Zeige, daß μ die folgende Eigenschaften hat:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \lambda(A) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \epsilon\,.$$

Man sagt auch: μ ist *absolutstetig* bezüglich λ und schreibt $\mu << \lambda$.
Hinweis: Führe einen Widerspruchsbeweis und konstruiere eine Menge X mit $\lambda(X) = 0$ und $\mu(X) > 0$. Verwende das Borel-Cantelli Lemma.