Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
16.04.2008

Analysis IV: Integration

3. Übung

G07 Diverse Limiten

Bestimme - sofern möglich - Limes, Limes inferior sowie Limes superior nachstehender Folgen.

(i) $a_k := 1 + \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

(ii) $b_k := \Big(2 + (-1)^k\Big)^k$

(iii) $c_k := \dfrac{1+k}{1+e^k} + \sin k$

G08 Operationstreue

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_\ell \subset X$, $B \subset Y$ und $B_\ell \subset Y$ für $\ell \in \mathbb{N}$.
Prüfe die folgenden Identitäten auf ihre Richtigkeit.

(i) $f\Big(\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} A_\ell\Big) = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} f(A_\ell)$

(ii) $f^{-1}\Big(\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} B_\ell\Big) = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_\ell)$

(iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$

G09 Meßbare Funktion?

Wir betrachten die von der Menge $\mathcal{E} := \big\{\{1,2,3\},\{3,4\}\big\}$ erzeugte σ-Algebra $\Sigma := \sigma(\mathcal{E})$ auf $X := \{1,2,3,4\}$.

i) Zeige, daß Σ aus allen möglichen Vereinigungen der Mengen $\{1,2\}$, $\{3\}$ und $\{4\}$ besteht.

ii) Untersuche die Funktionen $f, g\colon (X,\Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf Meßbarkeit:

$$\text{a)}\quad f(x) := (x-3)^2\ , \quad \text{b)}\quad g(x) := |x - \frac{3}{2}|\ .$$

iii) Überlege: Ist ein Maß auf einer σ-Algebra bereits durch seine Werte auf erzeugenden Mengen festgelegt?

H07 Lebesgue-Maß

Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeige:

i) Jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist meßbar mit $\lambda(A) = 0$.

ii) Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h., für jede meßbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(x + B) = \lambda(B)$.

Hinweis: Verwende die Eindeutigkeitsaussage für das Lebesgue-Maßes.

H08 Meßbare Funktionen

i) Zeige, daß jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

ii) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Zeige: Dann ist auch $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar.

iii) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Zeige: Dann ist auch f^2 meßbar.

Finde für iii) sowohl einen Beweis, der ii) verwendet, als auch einen, der ohne ii) auskommt.

H09 Das direkte Bild

Etwas allgemeiner als in der Vorlesung definieren wir: Eine Abbildung f zwischen meßbaren Räumen (X, Σ_X) und (Y, Σ_Y) heißt meßbar, wenn gilt

$$f^{-1}(A) \in \Sigma_X \quad \text{für alle} \quad A \in \Sigma_Y\ .$$

Zeige:

i) Ist $f\colon X \to Y$ eine Funktion, so ist

$$f_*\Sigma := \{E \subset Y\colon f^{-1}(E) \in \Sigma\}$$

eine σ-Algebra auf Y. Man nennt $f_*\Sigma$ das *direkte Bild von* Σ *unter* f und kann zeigen, daß dies die größte σ-Algebra auf Y ist, bzgl. der f meßbar ist.

ii) Die Abbildung f ist genau dann meßbar, wenn $\Sigma_Y \subset f_*\Sigma_X$ gilt.

iii) Bestimme das direkte Bild $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ der Borelmengen unter der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\,, \qquad f(x) \ := \ \lfloor x \rfloor \ := \ \max\{n \in \mathbb{Z}\colon n \le x\}\,.$$

Hinweis: Gilt beispielsweise $\{0\} \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$?