Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
09.04.2008

# Analysis IV: Integration

## 2. Übung

**G04 Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$**

Man sagt, ein System von Teilmengen $\mathcal{E}$ von $X$ *erzeugt* eine $\sigma$-Algebra $\Sigma = \Sigma(X)$, wenn

$$\Sigma = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\},$$

d.h. $\Sigma$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält (klar?).

Zeige, daß jedes der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_k$ eine $\sigma$-Algebra $\Sigma_k$ erzeugt, die mit der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ übereinstimmt, d.h. es gilt $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{E}_1 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$

(ii) $\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$

(iii) $\mathcal{E}_3 := \{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$

(iv) $\mathcal{E}_4 := \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$

*Hinweis:* Zeigen Sie $\Sigma_4 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \subset \Sigma_4 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**G05 Lebesgue-Maß einiger Borelmengen**

Betrachte die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Berechne das Lebesgue-Maß der folgende Mengen:

a) $(0, 1)$ b) $[0, 1]$ c) $\{0\}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ f) $[0, 1] \backslash \mathbb{Q}$

**G06 Borel-Cantelli-Lemma**

Sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen mit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < \infty .$$

i) Zeige, daß die Menge aller Punkte, die in allen Mengen $E_n$ sind, das Maß 0 hat.

ii) Zeige, daß die Menge aller Punkte, die in unendlich vielen von den Mengen $E_n$ enthalten sind, das Maß 0 hat.

**H04 Untervektorräume**

Zeige: Ist $U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k < n$, dann ist $U$ eine Nullmenge.

**H05 Das Cantorsche Diskontinuum**

Ausgehend von der abgeschlossenen Menge

$$A_0 := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k, 2k + 1]$$

bilden wir

$$A := \bigcap_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3^l} A_0 \ .$$

Dabei ist $cM := \{cx : x \in M\}$ für $c \in \mathbb{R}$ und einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$.
Das *Cantorsche Diskontinuum* ist dann definiert als

$$C = A \cap [0, 1] \ .$$

i) Skizziere $C$.

ii) Zeige, dass $C$ eine Nullmenge ist.

**H06 Eine nicht Lebesgue-meßbare Menge**

Wir möchten den folgenden Satz von Vitali beweisen:

**Satz.** *Es gibt kein nichttriviales translationsinvariantes Maß* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, *das auf beschränkten Mengen endliche Werte annimmt.*

Wir erklären eine Relation auf $\mathbb{R}$ vermöge

$$x \sim y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x - y \in \mathbb{Q} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Zeigen Sie, daß es in jeder Äquivalenzklasse ein $r \in [0, 1]$ gibt.

Nach (ii) existiert eine Menge $E \subset [0, 1]$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. (Daß man dies kann, ist Inhalt des sogenannten *Auswahlaxioms.*)

(iii) Für $p \in \mathbb{Q}$ sei $p + E := \{p + r : r \in E\}$. Zeigen Sie, daß

$$(p + E) \cap (q + E) = \emptyset \quad \text{für } p, q \in \mathbb{Q} \text{ mit } p \neq q.$$

*Hinweis:* Sei $x \in (p+E) \cap (q+E)$, dann ist $x = p + r = q + s$ für gewisse $r, s \in E$. Zeigen Sie, daß dann $r = s$, und somit $p = q$ folgen.

(iv) Zeigen Sie

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q + E) \subset [-1, 2]. \qquad (*)$$

(v) Sei nun $\mu$ ein Maß, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $\mu$ ist translationsinvariant, d.h. $\mu(x + A) = \mu(A)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\mu([0, 1]) = 1$.

Zeigen Sie nun: $E$ ist nicht $\mu$-meßbar.

*Hinweis:* Angenommen, $E$ ist $\mu$-meßbar. Nehmen Sie dann das Maß der Mengen in (*), und zeigen Sie, daß einerseits $\mu(E) > 0$, andererseits $\mu(E) = 0$ gilt.