Prof. K. Grosse-Brauckmann
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
02.04.2008

Analysis IV: Maß- und Integrationstheorie

1. Übung

G01 Wiederholung zur Vorlesung

i) Es seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Gleichungen ist richtig? (Begründung oder Gegenbeispiel!)

a) $\int_Q \{af(x) + g(x)\}\,dx = a\int_Q f(x)\,dx + \int_Q g(x)\,dx$

b) $\int_Q \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{1}{\int_Q f(x)\,dx}$

c) $\int_Q |f(x)|\,dx = |\int_Q f(x)\,dx|$

Seien nun $Q := [a,b]^2$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt dann

d) $\int_Q f(x)f(y)\,dxdy = (\int_Q f(x)\,dx)^2$?

ii) Zeichne die folgenden Funktionen und bestimme ihren Träger:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}, \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \ge 1 \end{cases}$$

Wie oft sind diese Funktionen differenzierbar? Rate oder erinnere dich!

iii) Bestimme für $a, b \in \mathbb{R}, a, b, > 0$ den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}\ .$$

Verwende hierzu eine geschickte Transformation $T : \mathbb{R}^2 \supset B_1 \to E$, wobei B_1 die Einheitskreisscheibe sei.

G02 σ-Algebren

i) Es sei X eine Menge. Zeige, daß $\{A \subset X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\} \subset \mathcal{P}(x)$ eine σ-Algebra ist.

ii) Ist $\{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ eine σ-Algebra?

iii) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und Σ eine σ-Algebra auf Y. Zeige, daß das Urbild $f^{-1}(\Sigma) \subset \mathcal{P}(X)$ von Σ unter f eine σ-Algebra ist.

G03 Stetigkeit des Maßes von oben

Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $A_i \in \Sigma$ eine Folge von Mengen, sodaß $\mu(A_1) < \infty$ und $A_1 \supset A_2 \cdots$. Zeige: $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k)$.

H01 Volumenberechnung

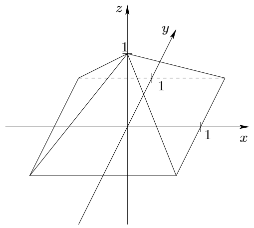
Berechne das Volumen der skizzierten Pyramide mit Grundfläche $G := [-1,1]^2$ und Höhe 1.

Hinweis: Betrachte die Pyramide nur über dem ersten Quadranten $Q := [0,1]^2$. Sie wird nach oben begrenzt durch den Graphen einer Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$.

i) Was sind die Gleichungen der beiden Ebenen, die f stückweise beschreiben?

ii) Skizziere den Graphen der Funktion $x \mapsto f(x,y)$ für festes $y \in [0,1]$, und berechne $\int_0^1 f(x,y)\,dx$.

iii) Berechne $\int_Q f(x,y)\,dxdy$. Was ist das Volumen der Pyramide?



H02 Diracmaße

Sei X eine Menge und Σ eine σ-Algebra auf X. Im Folgenden bezeichne δ_x das Dirac-Maß für einen Punkt $x \in X$.

i) Zeige: Ist $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \in X$, so ist $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\delta_{x_k}$ für jede σ-Algebra auf X ein Maß.

ii) Bestimme $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}\delta_{1/k}\big((0,1)\big)$.

iii) Auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiert

$$\mu : A \mapsto |A|$$

das Zählmaß.
Zeige, daß μ ein Maß ist und schreibe es als Linearkombination von Dirac-Maßen.

H03 Verteilungsfunktion

Sei $(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Wir betrachten nun die Funktion

$$F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_\mu(x) := \mu\big((-\infty, x)\big),$$

die auch die *Verteilungsfunktion von* μ genannt wird. Zeige die folgenden Eigenschaften:

i) F_μ ist monoton wachsend.

ii) F_μ ist linksseitig stetig, d.h., $\lim_{x\to a-} F_\mu(x) = F_\mu(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

iii) Es gelten $\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$.

iv) F_μ ist genau dann stetig in $x \in \mathbb{R}$, falls $\mu(\{x\}) = 0$.

★) Ein Borel-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ wird regulär genannt, falls

$$\mu(E) := \inf\{\mu(G) : E \subset G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ offen}\}$$

für alle Mengen E gilt. Sind nun μ und ν reguläre Borelmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $F_\mu = F_\nu$, so gilt $\mu = \nu$.