Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.06.2008

6. Übung

Differenzialgeometrie SS 2008

Aufgabe 22:
Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ heißt *Asymptotenrichtung* der Fläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ im Punkt p, wenn für die Normalkrümmung gilt $\kappa_n(X) = b_p(X, X) = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel:

a) Die Gausskrümmung $K(p)$ ist genau dann negativ, wenn es im Punkt p genau zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen gibt.

b) Die mittlere Krümmung $H(p)$ verschwindet genau dann, wenn es zwei senkrechte Asymptotenrichtungen X_1, X_2 gibt, d.h., $g(X_1, X_2) = 0$.

Aufgabe 23:
Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion mit Gauss-Abbildung ν und

$$f^s(u, v) := f(u, v) + s\nu(u, v), \quad (u, v) \in U$$

die zugehörige *Parallelfläche* im Abstand $s \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass f^s ebenfalls eine Immersion ist, sofern $|s|$ hinrecihend klein ist. Dies sei im Folgenden stets vorausgesetzt.

a) Zeigen Sie, dass ν auch Gaussabbildung von f^s ist.

b) Wir nehmen nun an, dass f nach Krümmungslinien parametrisiert ist, d.h., $\nu_u = -\kappa_1 f_u$ und $\nu_v = -\kappa_2 f_v$. (Das geht lokal immer, sofern f keinen Nabelpunkt besitzt.) Zeigen Sie:

$$f^s_u \times f^s_v = (1 + 2Hs + Ks^2)(f_u \times f_v).$$

c) Folgern Sie für den Flächeninhalt der Parallelfläche die Entwicklung

$$A(f^s) = A(f) + 2s \int_U H dA + s^2 \int_U K dA.$$