Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.04.2008

5. Übung

Differenzialgeometrie SS 2008

Aufgabe 18:
Gegeben seien die beiden Fläche $f(u,v) = [u, v, u^2/2 \pm v^2/2]^{\mathrm{t}}$.

a) Berechnen Sie jeweils

- die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingarten-Abbildung in Matrixdarstellung;
- die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 sowie die Gausskrümmung K und die mittlere Krümmung H;
- Berechnen Sie die Hauptkrümmungsrichtungen $v_i, i \in \{1,2\}$, sowie die zugehörigen Vektoren $w_i := Df v_i$ im Tangentialraum;
- den Grenzwert $\lim_{(u,v)\to(0,0)} w_i(u,v)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 19:
Sei $\tilde{f} := f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von f. Zeigen Sie: Wenn v eine Hauptkrümmungsrichtung von f ist, dann gibt es eine Hauptkrümmungsrichtung $\tilde{v}$ von $\tilde{f}$ mit $Df\,v = D\tilde{f}\,\tilde{v}$.

Aufgabe 20:
Sei Q eine orthogonale Matrix, q ein Vektor und $\hat{f} := Qf + q$ die Fläche, die durch die zugehörige Bewegung aus f hervorgeht. Zeigen Sie:

a) Wenn ν eine Gauss-Abbildung von f ist, dann ist $\hat{\nu} := Q\nu$ eine Gauss-Abbildung von $\hat{f}$.

b) Mit $\hat{\nu} = Q\nu$ gilt $S = \hat{S}$.

Aufgabe 21:
Sei $P := G^{-1}Df^{\mathrm{t}}$ die Pseudo-Inverse von Df und $E := P^{\mathrm{t}}BP$ die *eingebettete Weingarten-Abbildung* der Hyperfläche $f := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Welche Dimensionen haben P und E? Zeigen Sie $E\nu = P\nu = 0$.

b) Verifizieren Sie die Gleichung $EDf = -D\nu$. So, wie S die Relation zwischen den *Zeilen* von Df und $D\nu$ beschreibt, beschreibt also E die Relation zwischen den *Spalten* von Df und $D\nu$.

c) Zeigen Sie: Aus $Sv = \kappa v$ und $w := Df\,v$ folgt $Ew = \kappa w$.

d) Verifizieren Sie mit Hilfe des Resultats aus Teil b) nochmals den aus der Vorlesung bekannten Satz, dass alle Eigenwerte von S reell sind und dass die Hauptkrümmungsrichtungen im Tangentialraum paarweise orthogonal gewählt werden können.

e) Bestimmen Sie E für die zwei Flächen aus Aufgabe 18.