Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.05.2008

4. Übung

Differenzialgeometrie SS 2008

Aufgabe 14:
Gegeben seien die Flächen

$$k(u,v) = \begin{bmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ u \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad h(u,v) = \begin{bmatrix} \sinh u \sin v \\ -\sinh u \cos v \\ v \end{bmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Man nennt k das Katenoid und h das *Helikoid*.

a) Skizzieren Sie die Spuren von h und k (manuell oder mit Hilfe von Matlab).

b) Zeigen Sie, dass k und h *isometrisch* sind, d.h., dass die ersten Fundamentalformen übereinstimmen.

Aufgabe 15:
Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Hyperfläche, $\tilde{f} = f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung, $p \in U$ und $\tilde{p} = \varphi^{-1}(p)$.

a) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum eine Eigenschaft von $[f]$ ist, d.h. $T_p f = T_{\tilde{p}} \tilde{f}$.

a) Zeigen Sie, dass der orientierte Normalenvektor eine Eigenschaft von $\langle f \rangle$ ist, d.h. $\nu(p) = \tilde{\nu}(\tilde{p})$ falls $\det D\varphi > 0$.

Aufgabe 16:
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine geschlossene, regulär parametrisierte Kurve mit Koordinatenfunktionen $c(u) = \big(x(t),\, 0,\, z(t)\big)$ und Normalenvektor n, und sei

$$R(u) := \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

die Matrix, die eine Drehung um den Winkel u um die z-Achse beschreibt. Die von c erzeugte *Rotationsfläche* ist gegeben durch

$$f(u,v) = R(u)c(v), \quad (u,v) \in [0, 2\pi) \times I.$$

a) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform G. Welche Bedingung muss c erfüllen, damit f eine Immersion ist?

b) Geben Sie eine Gauss-Abbildung ν von f mit Hilfe von R und n an.

c) Geben Sie den Flächeninhalt der Spur von f an.

d) Gemäß der *ersten Guldinsche Regel* ist der Flächeninhalt der Spur von f gleich derm Produkt aus der Länge von c und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve c bei der Rotation beschreibt. Erklären Sie diese Regel anhand des Resultats aus Teil c).

e) Sei nun c ein Kreis um den Punkt $(R, 0, 0)$ mit Radius $r < R$, dann parametrisiert f einen *Torus*. Bestimmen Sie (ohne Rechung) den Flächeninhalt.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 17:
Die Standard-Parametrisierung einer Kugel mit Radius r um den Ursprung lautet

$$k(u,v) = \begin{bmatrix} r\cos u \sin v \\ r \sin u \sin v \\ r\cos v \end{bmatrix}, \quad (u,v) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi, 2].$$

Eine *Loxodrome* ist eine Kurve auf der Kugel, deren Winkel zu den Parameterlinien von k konstant ist. Das Bild unten zeit eine Illustration von M.C. Escher.

a) Betrachten wir speziell die Erdkugel. Identifizieren Sie die Parameterlinien von k mit Längen- und Breitenkreisen. Wie erhält man den Äquator, Nord- und Südpol? Diskutieren Sie die Bedeutung von Loxodromen für die Schifffahrt.

b) Ist k eine Immersion?

c) Sei

$$c(t) = [u(t),\, v(t)] = [\ln\cot(\pi/4 - t/2),\, \pi/2 - t], \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Skizzieren Sie die Koordinatenfunktion $u(t)$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Flächenkurve $k \circ c$ um eine Loxodrome mit Richtung „Nord-Ost“ handelt. *Hinweis:* Im Verlauf der Rechnung kann die Formel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ nützlich sein.

d) Berechnen Sie die Länge von c.