Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

02.05.2008

2. Übung

Differenzialgeometrie SS 2008

Aufgabe 6:
a) Gegeben sei eine regulär parametrisierte Kurve $c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit begleitendem Dreibein (v, n, b) sowie die Kurve

$$\tilde{c}(t) := c(0) + tv(0) + \beta(t)n(0) + \gamma(t)b(0).$$

Geben Sie möglichst einfache reelle Funktionen β, γ an, sodass begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion an der Stelle $t = 0$ übereinstimmen,

$$v(0) = \tilde{v}(0), \quad n(0) = \tilde{n}(0), \quad b(0) = \tilde{b}(0), \quad \kappa(0) = \tilde{\kappa}(0), \quad \tau(0) = \tilde{\tau}(0).$$

b) Durch eine Bewegung der Kurve $\tilde{c}$ kann man erreichen, dass $c(0)$ in den Ursprung und $v(0), n(0), b(0)$ in die Einheitsvektoren des Koordinatensystems überführt werden. Geben Sie die Parametrisierung der transformierten Kurve an.

Aufgabe 7:
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve. Zeigen Sie:

a) Die Torsion τ ist eine Eigenschaft von $[c]$.
b) $c(I)$ ist genau dann Teilmenge einer Ebene, wenn $\tau = 0$.
c) $c(I)$ ist genau dann Teilmenge einer Geraden, wenn $\kappa = 0$.

Aufgabe 8[$*$]**:**
Geben Sie eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit $\kappa = 1$ und $\tau \neq 0$ an. Hinweise hierzu finden Sie im Skript auf Seite 23 (Aufgabe 17).

Aufgabe 9:
Sei $c : I \to \mathbb{R}^d$ eine glatte, regulär parametrisierte Kurve. Bezeichne L_h die Länge des Kurvenstücks, das $c(t_0)$ und $c(t_0 + h)$ verbindet, und $d_h := |c(t_0 + h) - c(t_0)|$ den Abstand zwischen den beiden Punkten. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{L_h - d_h}{d_h^3} = \frac{\kappa(t_0)^2}{24}$$

Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Überlegen Sie sich, dass man o.B.d.A. annehmen kann, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist.
b) Verifizieren Sie für eine BL-Kurve durch Ableiten von $\langle c', c'' \rangle = 0$ die Gleichung $\langle c', c''' \rangle = -\kappa^2$.
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von c im Punkt t_0 bis zu den kubischen Termen an.
d) Geben Sie die Taylorentwicklung von d_h bis zu den kubischen Termen an.
e) Berechnen Sie den obigen Grenzwert.

Aufgabe 10[$*$]**:**
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Jordankurve und G das von $c(I)$ berandete beschränkte Gebiet. Zeigen Sie: G ist genau dann konvex, wenn $\kappa \geq 0$.