Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.04.2008

1. Übung

Differenzialgeometrie SS 2008

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine Kurve der Form

$$c(t) = \big(r(t)\cos t,\, r(t)\sin t\big), \quad t \in I.$$

a) Bestimmen Sie $|c'(t)|$. Welche Bedingung muss die Funktion r erfüllen, damit c regulär ist?

b) Sei nun speziell $r(t) = e^{-t}$ und $I = [0, \infty)$. Skizzieren sie die Spur der Kurve, berechnen Sie die Länge $L(c)$ und geben Sie die Parametrisierung $\tilde{c}$ von $\langle c \rangle$ nach der Bogenlänge an.

Aufgabe 2:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine regulär parametrisierte Kurve mit nichtverschwindender Krümmung gilt

$$\kappa\nu = \frac{c''\langle c', c'\rangle - c'\langle c'', c'\rangle}{|c'|^4}.$$

a) Berechnen Sie die Krümmung κ und (sofern definiert) den Normalenvektor ν für die Kurve $c(t) = (t^3/3, 1, t)$.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\uparrow 0} \nu(t)$ und $\lim_{t\downarrow 0} \nu(t)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3:
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve.

a) Zeigen Sie, dass es in $\langle c \rangle$ genau eine Parametrisierung $\tilde{c}$ nach der Bogenlänge gibt. *Hinweis:* Die Existenz einer derartigen Parametrisierung wurde bereits in der Vorlesung gezeigt. Nehmen Sie also an, dass es zwei verschiedene Parametrisierungen nach der Bogenlänge gibt.

b) In $[c]$ gibt es genau eine weitere Parametrisierungen $\hat{c}$ nach der Bogenlänge. Wie hängen $\tilde{c}$ und $\hat{c}$ miteinander zusammen?

Aufgabe 4[∗]:
Seien $\tilde{c}$ und $\hat{c}$ die beiden Parametrisierungen von $[c]$ nach der Bogenlänge gemäß Aufgabe 3b. In welchem Zusammenhang stehen die Krümmungen $\tilde{\kappa} := |\tilde{c}''|$ und $\hat{\kappa} := |\hat{c}''|$ sowie die Normalenvektoren $\tilde{\nu} := \tilde{c}''/|\tilde{c}''|$ und $\hat{\nu} := \hat{c}''/|\hat{c}''|$?

Aufgabe 5:
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, regulär parametrisierte Kurve. Gemäß dem Integralsatz in der Ebene gilt für den (orientierten) Flächeninhalt des von der Spur von c berandeten Gebiets

$$A(c) = \int_a^b \langle c(t), Pc'(t)\rangle\, dt, \quad P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Der Flächeninhalt ist eine Eigenschaft von $\langle c \rangle$, d.h., $A(c) = A(c \circ \varphi)$ für $\varphi' > 0$.

b) Der Flächeninhalt ist translationsinvariant, d.h., $A(c) = A(c + p)$ für konstante Vektoren $p \in \mathbb{R}^2$.

c[∗]) Der Flächeninhalt ist rotationsinvariant, d.h., $A(c) = A(Rc)$ für Rotationsmatrizen $R \in SO(2)$.