Erinnerung (Vereinfachtes Newton-Verfahren):

$$F(x^\circ) * \overline{\Delta x^k} = -F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + \overline{\Delta x^k} \qquad k = 0,1,...$$

Konvergenzanalyse:

*Wir untersuchen die Auswirkungen der fest gewählten Jacobi−*Matrix $F'(x^\circ)$ *auf das Konvergenzverhalten des Newton−Verfahrens. Dazu betrachten und beweisen wir folgendes*

Theorem:

Sei $F: D \to \mathbb{R}^n$ *eine stetig differenzierbare Abbildung mit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und konvex.*
Sei $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ *ein gegebener Startpunkt, so dass* $F'(x^\circ)$ *nicht singulär ist.*
Es gelte die affin covariante Lipschitzbedingung
$\| F'(x^\circ)^{-1} (F(x) - F'(x^\circ)) \| \leq \omega_0 \| x - x^\circ \|$ *für alle* $x \in D$

Sei $h_0 := \omega_0 \| \overline{\Delta x}^\circ \| \leq \frac{1}{2}$

Definiere $t^* = 1 - \sqrt{1 - 2h_0}, \qquad \rho = \frac{t^*}{\omega_0}$

weiter sei $\overline{S}(x^\circ, \rho) \in D$

Dann bleibt die vereinfachte Newton−Iterierte in $\overline{S}(x^\circ, \rho)$ *und konvergiert gegen ein* x^* *mit* $F(x^*) = 0$.
Die Konvergenzrate kann abgeschätzt werden durch

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k - x^{k+1}\|} \leq \frac{1}{2}(t_k + t_{k-1}), \qquad k = 0,1,...$$

und $\|x^k - x^*\| \leq \frac{t^* - t_k}{\omega_0} \qquad k = 0,1,...$

Beweis:

Zunächst betrachten wir $\|x^{k+1} - x^k\|$ *und stellen fest, dass* $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\|^2$

(*Beweis siehe Orthega und Rheinboldt: Iterative Solution of non linear Equations* in *Several Variables Kapitel* 12.6)

also

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^k\| &\leq \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\| \, \|x^k - x^{k-1}\| \\
&= \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\| \, \|x^k - x^{k-1} - x^\circ + x^\circ\| \\
(*) \qquad &\leq \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\| \, (\|x^{k-1} - x^\circ\| + \|x^k - x^\circ\|) \quad (\textit{Dreiecksungleichung})
\end{aligned}$$

Als nächstes führen wir Majoranten ein

$$\omega_0\|x^{k+1} - x^k\| \leq h_k \qquad h_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$\omega_0\|x^k - x^\circ\| \leq t_k \qquad t_0 = 0$$

Es gelten die Abschätzungen
$\|x^{k+1} - x^\circ\| \leq \|x^k - x^\circ\| + \|x^{k+1} - x^k\|$ *auf Grund der Dreiecksungleichung und damit*

$$\omega_0\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{1}{2} h_{k-1}(t_k + t_{k-1}) =: h_k$$

denn mit (*) *gilt*

$$\begin{aligned}\omega_0\|x^{k+1} - x^k\| &\leq \omega_0 \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\| \,(\|x^{k-1} - x^\circ\| + \|x^k - x^\circ\|) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\|}_{h_{k-1}} \,(\underbrace{\omega_0\|x^{k-1} - x^\circ\|}_{t_{k-1}} + \underbrace{\omega_0\|x^k - x^\circ\|}_{t_k}) \\ &\leq \frac{1}{2} h_{k-1}(t_k + t_{k-1})\end{aligned}$$

Wir erhalten also 2 *Majorantengleichungen:*

1. $h_{k+1} = \frac{1}{2} h_{k-1}(t_k + t_{k-1})$
2. $t_{k+1} = t_k + h_k$

die wir zu

$$\begin{aligned}t_{k+1} - t_k &= \frac{1}{2} h_{k-1}(t_k + t_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})(t_k + t_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}({t_k}^2 + {t_{k-1}}^2)\end{aligned}$$

Dies sortieren wir um zu

$$t_{k+1} - \frac{1}{2}{t_k}^2 = t_k - \frac{1}{2}{t_{k-1}}^2$$

Wir stellen fest, dass hier nur ein Indexshift vorliegt und weden den sogenannten Ortega−Trick an und erhalten:

$$t_{k+1} - \frac{1}{2}{t_k}^2 = t_1 - \frac{1}{2}{t_0}^2 = h_0$$

Zur Erinnerung: $h_0 = \omega_0\|\overline{\Delta x}^\circ\| \leq \frac{1}{2}$

Wir schreiben dies nun um ∈ eine Vereinfachte−Newton−Iteration.

Sei $g(t) = h_0 - t + \frac{1}{2}t^2$,

dann ist die Newton−Iteration gegeben durch:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{g(t_k)}{g'(t_0)} = g(t_k)$$

Betrachtet man den Graphen dieser Parabel, so kann man ablesen, dass die Iteration, wenn sie bei $t = 0$ *startet und* h_0 *lslant* $\frac{1}{2}$, *gegen die Nullstelle* t^* *konvergiert mit*

$t^* = 1 - \sqrt{1 - 2h_0}$ (*einfaches Anwenden der* $p-q-$*Formel*).

Ist $h_0 > \frac{1}{2}$ *existiert keine reelle Wurzel.*

Wir sehen direkt, dass $g(t_{k+1}) < g(t_k)$, *was wegen* $h_k = t_{k+1} - t_k = g(t_k)$ *gleichbedeutend zu* $h_{k+1} < h_k$ *ist.*

Weiter erhalten wir mit $t_k < t^* = 1 - \sqrt{1-2h_0}$ *sofort*

$x^k \in \overline{S}(x^\circ, \rho) \subset D$ *sowie* $x^* \in \overline{S}(x^\circ, \rho) \subset D$

Für die Konvergenzrate betrachten wir nun noch

$$\omega_0 \|x^k - x^*\| = \omega_0 \|x^* - x^k\| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} h_i = t^* - t_k$$

(*beachte* $\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant h_k$, *weiter ist dies eine Teleskopsumme*)

es gilt also $\omega_0 \|x^k - x^*\| \leqslant t^* - t_k$

$$\text{also } \|x^k - x^*\| \leqslant \frac{t^* - t_k}{\omega_0}$$

Zuletzt folgt aus $(*)$, *also*

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_0 \|x^k - x^{k-1}\| (\|x^{k-1} - x^\circ\| + \|x^k - x^\circ\|),$$

folgt schnell:

$$\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k - x^{k-1}\|} \leqslant \frac{1}{2}\omega_0 (\|x^{k-1} - x^\circ\| + \|x^k - x^\circ\|) \leqslant \frac{1}{2}\omega_0 (t_k + t_{k+1})$$

Somit haben wir alle Aussagen bewiesen.

Aus diesem Theorem können wir nun ableiten

$$\Theta_k = \frac{\|\overline{\Delta x}^{k+1}\|}{\|\overline{\Delta x}^k\|} \leqslant \frac{h_{k+1}}{h_k} = \frac{1}{2}(t_{k+1} + t_k) \quad \text{mit } t_0 = 0,\ t_1 = h_0$$

Die Bedingung $h_0 \leqslant \frac{1}{2}$ *führt zu* $\Theta_0 = \frac{\|\overline{\Delta x}^1\|}{\|\overline{\Delta x}^\circ\|} \leqslant \frac{1}{4}$

Im *Verhältnis zu einem normalen Newton−Verfahren mit* $\Theta_0 < 1$ *ist das eine deutliche Reduktion.*

Weiter sehen wir, dass sich die Konvergenzgeschwindigkeit verlangsamt zu $\Theta_k < t^* = 1 - \sqrt{1-2h_0}$.

Ersetzen wie das theoretische t^* *durch verfügbare berechnete Werte*

$$[t^*] = 1 - \sqrt{1 - 4\Theta_0} \leqslant 1 - \sqrt{1 - 2h_0} = t^* \leqslant 1$$

so erkennen wir, dass das vereinfachte Newton−Verfahren mit $\Theta_k \geqslant [t^*]$ *konvergiert.*

Wir können eine obere Schranke ableiten durch

$$\|x^k - x^*\| \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \|\overline{\Delta x^j}\|$$

$$\|x^k - x^*\| \leqslant \|\overline{\Delta x^k}\|(1 + \Theta_k + \Theta_{k+1} + \dots) \leqslant \frac{\|\overline{\Delta x^k}\|}{1 - t^*} \quad (\textit{Hinweis: einsetzten und geometrische Reihe})$$

Setzten wir die Abschätzung von oben ein erhalten wir

$$\frac{\|\overline{\Delta x^k}\|}{\sqrt{1 - 4\Theta}} \leqslant XTOL \ (\textit{Benutzerdefinierte finale Fehlertoleranz})$$