Löse skalare Gleichung $f(x) = 0$

für $\Delta x := x^* - x^0 \implies 0 = f(x^0 + \Delta x) = f(x^0) + f'(x^0)\Delta x + O(|\Delta x|^2)$

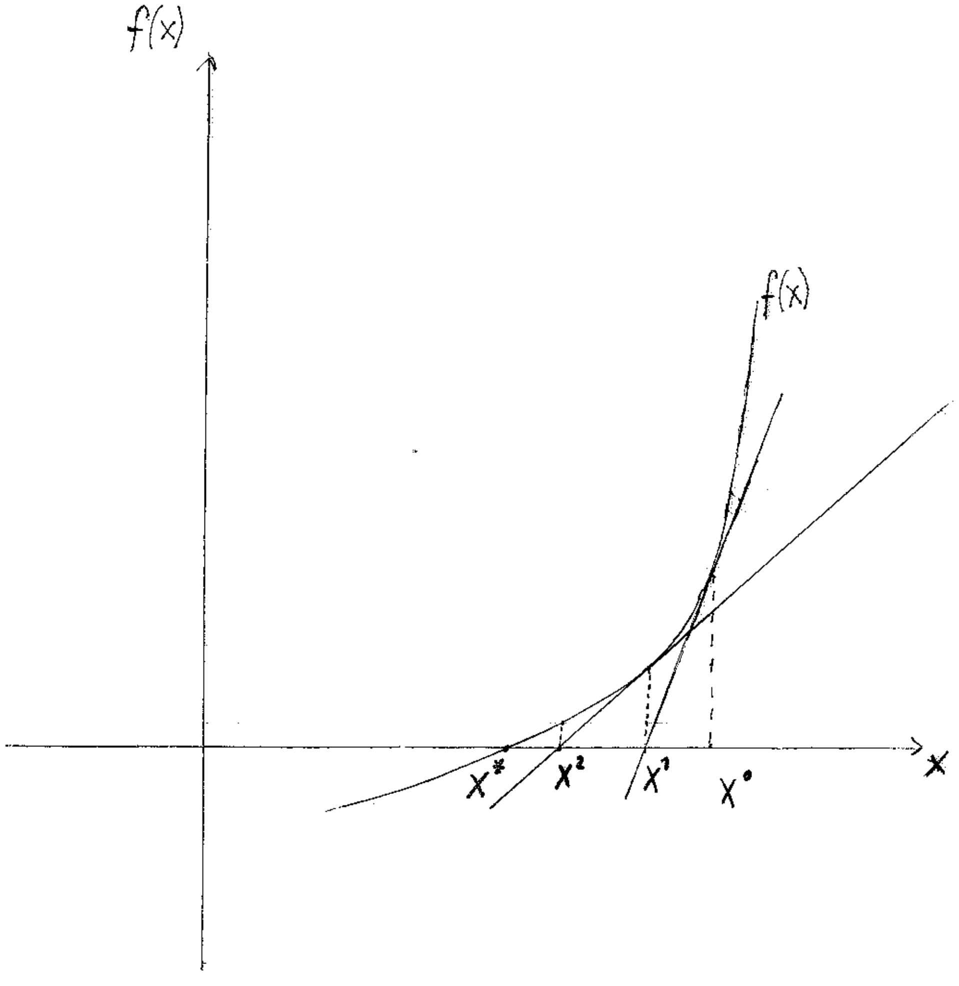
für $f'(x^0) \neq 0 \implies \underline{x^1} = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$, erste Korrektur.

<u>Fixpunktiteration</u>: $\phi(x^k) := x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$, $k = 0, 1 \dots$, $f'(x^k) \neq 0$

wir haben eine kontrahierende Abbildung ϕ,

mit $|\phi(x^k) - \phi(x^*)| \leq \theta |x^k - x^*| \iff |x^{k+1} - x^*| \leq \theta |x^k - x^*|$,

für $\theta := \max_{x \in I} \phi'(x) = \max_{x \in I} \frac{f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}$. $\underline{(\theta < 1)}$



Newton - Rapson - Simpson - Verfahren

- <u>Francois Vieta</u> (1540 - 1603): $\Delta X = X^* - X^0$
- <u>Isaac Newton</u> (1643 - 1727): Gleichung $X^3 - 2X - 5 = 0$

$X^0 = 2 \Rightarrow$ Ansatz $X = 2 + p \Rightarrow p \approx 0{,}1 \Rightarrow$ Ansatz $p = 0{,}1 + q$ .....

Also $X^3 = X^0 + p + q + r = 2{,}09455147$. $\left(p = X_1 - X^0 = - \frac{f(X^0)}{f'(X^0)} \right)$

- <u>Joseph Rapson</u> (1648 - 1715): Folge von Näherungen X^k
- <u>Thomas Simpson</u> (1710 - 1761): Gleichungssysteme

Allgemeines nicht lineares Problem $\underline{F(x) = 0}$,

wobei $F: D \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ stetig differenzierbar.

$$\Rightarrow \quad F'(x^k)\, \Delta X^k = - F(x^k) \quad , \quad (1)$$

$$\text{mit} \quad X^{k+1} = X^k + \Delta X^k \quad , k = 0, 1, \ldots$$

$$\cancel{\Delta X^k = - F'(X^k)^{-1} F(X^k)}$$

Vorraussetzungen für Anwendbarkeit des Verfahrens:

$F'(x^k)^{-1}$ für alle x^k muss:

I) existieren

II) beschränkt sein

oder

a) global $\| F'(x)^{-1} \| \leq \beta < \infty \qquad x \in D \qquad (2)$

b) Lokal $\| F'(x^0)^{-1} \| \leq \beta_0 \qquad (3)$

Vorraussetzung für Konvergenz des Verfahrens:

Kontraktionseigenschaft von F gegeben

durch Lipschitzbedingung:

$$\| F'(x) - F'(\bar{x}) \| \leq \gamma \| x - \bar{x} \| \qquad x, \bar{x} \in D. \quad (4)$$

Unter Vorraussetzung von (3), (4) und

$h_0 := \|x^1 - x_0\| \beta_0 \gamma < \frac{1}{2}$ (<u>Newton - Kantorovitch</u>)

$\Rightarrow$ existenz und eindeutigkeit der Lösung.

$\Rightarrow \rho \sim 1/\beta_0 \gamma$

Unter Vorraussetzung von (2), (4) und

$h_0 := \|x^1 - x^0\| \beta \gamma < 2$ (<u>Newton - Mysovskikh</u>)

$\Rightarrow$ eindeutigkeit der Lösung.

$\Rightarrow \rho \sim 1/\beta\gamma$

Affine Transformation

Seien $A, B \in Gl_n(\mathbb{R})$

Löse : $0 = G(y) := A\,F(By)$, mit $x = By$

$\Rightarrow$ N.V. : $G'(y^k)\Delta y^k = -G(y^k)$, $y^{k+1} = y^k + \Delta y^k$, $k = 0, 1, \ldots$

Beachte die Beziehung: $G'(y^k) = AF'(x^k)B$ und $y^0 = B^{-1}x^0$

Sei $B = I \Rightarrow x = y$ und $G(x) = AF(x) = 0$

$\Rightarrow$ Neuformulierung der Bedingungen (2), (3) und (4).

$\Rightarrow$ Das Problem: $\rho(A) \sim 1/\beta(A)\gamma(A)$

$$\left.\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \|F'(x^0)^{-1}(F'(x) - F'(\bar{x}))\| \leq \underline{\underline{\omega_0}} \, \|x - \bar{x}\|$$

Affine covariant, denn

$$G'(x^0)^{-1}(G'(x) - G'(\bar{x})) = (A\,F'(x^0))^{-1} \cdot A \cdot (F'(x) - F'(\bar{x})) = F'(x^0)^{-1}(F'(x) - F'(\bar{x}))$$

Sei $A = I \Rightarrow G(y) = F(By) \qquad x = By$

Unter den Vorraussetzungen (2) und (4), die neu formuliert wurden, kann man eine

Affine contravarinte Lipschitz-Bedingung

$$\|(F'(\bar{x}) - F'(x))(\bar{x} - x)\| \leq \underline{\omega} \, \|F'(x)(\bar{x} - x)\|^2$$ angeben.

$$(G'(\bar{y}) - G'(y))(\bar{y} - y) = \;\ldots\ldots\; = (F'(\bar{x}) - F(x))(\bar{x} - x).$$

Lösung von $F(x)=0 \Leftrightarrow$ Gleichgewichtspunkt eines dynamischen Systems $\dot{x} = F(x)$

Betrachte <u>affine similarity</u> Transf. $A\dot{x} = AF(x) = 0$

mit $y = Ax \Rightarrow G(y) = AF(A^{-1}y) = 0$

$$\Rightarrow G'(y) = A\,F'(x)\,A^{-1} \rightarrow \text{Eigenwerte gleich}$$

Lipschitzbedingung : $\|(F'(\bar{x}) - F'(x))u\| \le \omega \|\bar{x}-x\| \cdot \|u\|$

Minimierungsproblem $f(x) = \min \quad f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad F(x): \operatorname{grad} f(x) = f'(x)^T = 0 \qquad x \in D$.

Wohldefiniert : $(F'(x))^{\frac{1}{2}}$

Betrachte : $g(y) = f(By) = \min \quad , x = By$

$\Rightarrow G(y) = B^T F(By) = 0 \Rightarrow G'(y) = \underline{B^T F'(x) B}$ Konjugation

Energie Produkt : $(u,v) := u^T F'(x) v \quad , u,v,x \in D$ ist unter dieser affinen Transformation invariant.

Lipschitz B. $\|F'(x)^{-\frac{1}{2}}(F'(\bar{x}) - F'(x))(\bar{x}-x)\| \le \omega \|F'(x)^{\frac{1}{2}}(\bar{x}-x)\|^2$