Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 18.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

12. Tutorium

(T 1)

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für $0 < r < R$ hat dann die 2π-periodische Funktion $g(t) = f(re^{it})$ die Fourierreihe $S_\infty(g) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n c_n e^{int}$. Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um die folgenden Reihenwerte zu bestimmen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$

(T 2) (Partialbruchreihe des Cotangens und Eulersches Sinusprodukt)

(a) Beweisen Sie die folgende Darstellung für den Cotangens

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right),$$

indem Sie die Fourierreihe von $f(x) = \cos(zx)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ und $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ bestimmen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Darstellung für Cotangens die Produktdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) := \pi x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

für alle $x \in (-1, 1)$.

Hinweis: Berechnen Sie Stammfunktionen von $\pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$.

(c) Dehnen Sie die Formel aus (b) auf alle $x \in \mathbb{R}$ aus.

(T 3)

Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gibt deren Fourierreihe an mindestens einer Stelle $x_0 \in [0, 2\pi]$ nicht konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Resultate aus der Funktionalanalysis:

Für den stetigen Operator $T_g : C([0, 2\pi]) \to \mathbb{R}$, $T_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$, wobei $g \in C([0, 2\pi])$, ist die Operatornorm gegeben durch $\|T_g\| = \int_0^{2\pi} |g(x)|\,dx$.

Satz von Banach-Steinhaus: Es seien X und Y Banachräume. Weiter seien $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkte, lineare Operatoren. Gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$ für alle $x \in X$, so gilt sogar $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.