Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 21.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

8. Tutorium

(T 1)

Beweisen Sie Lemma VIII.1.4 der Vorlesung für $m = 1$:

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, x \in U$ mit $\overline{ax} \subseteq U$. Gilt dann

$$L := \sup_{t\in[0,1]} \big\|\nabla f\big(a + t(x - a)\big)\big\| < \infty,$$

so ist $\|f(x) - f(a)\| \leq L\|x - a\|$.

(T 2)

Wir betrachten wieder die Situation aus Aufgabe (G3) von Blatt 7:

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ höchstens endlich viele Urbilder unter f besitzt.

(T 3)

Die Funktion $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f_1(x, y) = x$, sowie

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{falls } y \leq -x^2, \\ -y - \frac{y^2}{x^2}, & \text{falls } -x^2 < y < 0, \\ \frac{y^2}{x^2} - y, & \text{falls } 0 \leq y < x^2, \\ y - x^2, & \text{falls } x^2 \leq y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar und $f'(0,0)$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass es in jeder Umgebung des Nullpunktes Punkte (x, y) und (w, z) mit $(x, y) \neq (w, z)$ aber $f(x, y) = f(w, z)$ gibt.

(c) Warum ist das kein Widerspruch zum Satz über die Umkehrabbildung?

Hinweis: Man beachte, dass $-f_2(x, y) = f_2(x, -y)$ ist.