Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 30.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

5. Tutorium

(T 1)

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_1 f(x,y) = xy \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x,y) = y^2 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(T 2)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *positiv homogen* vom *Grade* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$ gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grade α, so gilt die *Eulersche Relation*

$$(\mathrm{grad} f(x) \mid x) = \alpha f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(T 3)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie

(a) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Die partiellen Ableitungen $\partial_1 \partial_2 f$ und $\partial_2 \partial_1 f$ existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$, sind im Nullpunkt aber verschieden.