Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

4. Tutorium

(T 1)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion ϕ mit $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \phi(h)$ und $\lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0$.

(b) Behandeln Sie die selbe Aufgabenstellung für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(T 2)

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2.$$

Es seien nun $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^2$ fest gewählt. Entscheiden Sie von jedem der folgenden Ausdrücke, ob er Sinn macht und was für ein Gebilde (Skalar, Vektor, Matrix, ...) er ist. Berechnen Sie ihn dann im konkreten Beispiel, sofern er sinnvoll ist.

a) $f(t)$	b) $g(x)$	c) $f(x)$	d) $g(t)$
e) $g(f(t))$	f) $f(g(x))$	g) $Dg(x)$	h) $Dg(t)$
i) $Df(t)$	j) $Dg(x) \cdot y$	k) $D(f + g)(x)$	l) $D(f \circ g)(x)$
m) $D(g \circ f)(t)$	n) $D(f \circ g)(x) \cdot y$	o) $D(f \circ g)(y) \cdot x$	p) $D(f \circ g)(x) \cdot t$
q) $Df(g(x)) \cdot Dg(x)$	r) $Df(g(t)) \cdot Dg(t)$	s) $Dg(f(t)) \cdot Df(t)$	

(T 3)

Beweisen Sie Korollar VII.2.5 der Vorlesung:

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sowie $f = (f_1, \ldots, f_m) : J \to V$ und $g : V \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist $g \circ f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x_0 \in J^\circ$

$$(g \circ f)'(x_0) = D(g \circ f)(x_0) = \big(\operatorname{grad} g(f(x_0)) \mid f'(x_0)\big) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x_0)) f_j'(x_0).$$