Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

3. Tutorium

(T 1)

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n, \mathbb{R})$ der orthogonalen $n \times n$-Matrizen als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ eine kompakte Menge ist.

(T 2)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *quadrat-summierbar*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Wir setzen

$$\ell^2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ quadrat-summierbar}\}$$

(a) Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus ℓ^2 sind, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|a\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}, \quad a \in \ell^2$$

eine Norm auf ℓ^2 definiert.

(c) Zeigen Sie, dass ℓ^2, versehen mit $\|\cdot\|_2$ ein Banachraum ist.

(T 3)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Funktion, so dass T^N für ein $N \in \mathbb{N}$ eine strikte Kontraktion ist. Beweisen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.