Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 9.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

2. Tutorium

(T 1)

Man wähle in $M := \mathbb{R}^2$ einen festen Punkt x_0 und nenne ihn Paris. Definiere $d(x,y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$ folgendermaßen: $d(x,y)$ sei der euklidische Abstand zwischen x und y, falls x und y auf einer Geraden durch x_0 liegen; andernfalls sei $d(x,y)$ die Summe der euklidischen Abstände zwischen x, x_0 und y, x_0. Man nennt d die *Metrik des französischen Eisenbahnsystems.*

(a) Zeigen Sie, dass dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Skizzieren Sie für $x_0 = (0,0)$ jeweils die Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0,3)$, $(0,0)$ und $(0,\frac{1}{2})$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Norm gibt, die die Metrik d induziert.

(T 2)

Es seien X, Y ein normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass T stetig ist, falls T für ein $x_0 \in X$ stetig ist.

(b) Wir betrachten speziell $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit $Tf = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass T linear und stetig ist, wenn man $C([0,1])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versieht.

(c) Wir betrachten die Ableitung auf dem Vektorraum der Polynome, d.h. $D : P \to P$, mit $Dp = p'$. Zeigen Sie, dass D linear ist und bestimmen Sie das Bild, den Kern und die Eigenwerte von D.

(T 3)

Zeigen Sie, dass auf $C([0,1])$ die beiden Normen $\|f\|_1 = \int |f|$ und $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ nicht äquivalent sind.