IX Kurven und Vektorfelder

Wir beginnen dieses Kapitel mit dem Begriff einer Kurve in $\mathbb{R}^n$ und lassen uns hierbei von einem Kurvenbegriff, der aus der Physik, genauer aus der Kinematik herrührt, leiten. Er beschreibt die Abstraktion der Bewegung eines Punktes im Raum, die durch die Angabe des Ortes $\gamma(t)$ zum Zeitpunkt t gegeben ist. Dieser Ansatz geht auf den französischen Mathematiker C. JORDAN (1838-1922) zurück. Kurven in diesem Sinn können sehr überraschende Eigenschaften besitzen. Zum Beispiel überdeckt die von G. PEANO (1858-1932) konstruierte Kurve vollständig ein Quadrat.
Eine der ersten Aufgaben der Kurventheorie ist die Rektifikation, also die Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve. Eng verbunden mit dieser Problematik sind Funktionen von beschränkter Variation.
Im zweiten Paragraphen diskutieren wir dann Vektorfelder und Kurvenintegrale. Letztere sind Integrale, welche sicht nicht nur über Intervalle, sondern über stetig differenzierbare Bilder von Intervallen, also über Kurven, erstrecken. Diese Erweiterung des Integralbegriffs hat viele wichtige Konsequenzen. Zum Beispiel lassen sich hiermit jene Vektorfelder charakterisieren, welche als Gradienten von Potentialen erhalten werden können. Die grundlegenden Begriffe der Divergenz und Rotation eines Vektorfelds spielen in diesem Zusammenhang ebenfalls ein wichtige Rolle.

1 Kurven

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition des Kurvenbegriffs.

1.1 Definition. Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt *Kurve in* $\mathbb{R}^n$. Die Kurve heißt *(stetig) differenzierbar*, falls γ (stetig) differenzierbar ist. Das Bild $\gamma(I)$ wird auch die *Spur* von γ genannt.

Nach der obigen Definition ist eine Kurve also nicht nur eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n$, sondern zu ihr gehört auch der durch γ übermittelte Ablaufplan des Durchlaufens der Spur.

1.2 Beispiele.
a) Ist $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (t, f(t))$$

eine Kurve. Die Spur von γ ist der Graph von f.
Ferner, ist f differenzierbar, so ist auch γ differenzierbar und es gilt $\gamma'(t) = (1, f'(t))$.
b) Für $r > 0$ beschreibt

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (r\cos t, r\sin t)$$

eine Kreisbewegung um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Radius r. Da γ differenzierbar ist mit $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, ist der Betrag der Geschwindigkeit der Kreisbewegung gleich r.
c) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ beschreibt

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,\ \gamma(t) := a + vt$$

eine geradlinige Bewegung in Richtung v mit Geschwindigkeit $\gamma'(t) = v$.
d) Für $r > 0$ und $c \neq 0$ beschreibt

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := (r\cos t, r\sin t, ct)$$

eine *Schraubenlinie*. Die Spur liegt auf dem Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ und $2\pi c$ heißt die *Ganghöhe*.

e) Die *Neilsche Parabel* ist gegeben durch

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (t^2, t^3).$$

Sie war nach dem Kreis historisch gesehen die erste Kurve, für welche man die Bogenlänge berechnen konnte.
f) Die *Zykloide* wird beschrieben durch die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Die Zykloide beschreibt die Bewegung eines Randpunktes der Einheitskreisscheibe, welche auf der x-Achse abrollt.

Die Zykloide ist auch aus anderer Sicht interessant. Sie ist die Lösung des sogenannten *Brachystochronenproblems*, des Variationsproblems für die Kurve mit der kürzesten

Laufzeit eines Massenpunkts zwischen zwei festen Punkten unter dem Einfluss der Schwerkraft. Bernoulli, Huygens und Leibniz fanden als Lösung dieses Problems die Zykloide.

1.3 Definition. Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, so heißt

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialvektor* der Kurve γ in t.

Der Vektor $\gamma'(t)$ lässt sich als die Geschwindigkeit der Kurve γ im Punkt t interpretieren und besitzt den Betrag

$$\|\gamma'(t)\| = (|\gamma_1'(t)|^2 + \ldots + |\gamma_n'(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Bogenlänge einer gegebenen Kurve. Unsere Idee besteht darin, die Bogenlänge durch geeignete Polygonzüge zu approximieren. Wir betrachten daher eine Partition P des Intervalls $[a, b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ und definieren die Länge eines Polygonzugs mit den Ecken $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$ als

$$L_{P,\gamma} := \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

1.4 Definition. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit Länge L_γ, falls

$$L_\gamma := \sup_P L_{P,\gamma} < \infty$$

gilt. Die Zahl L_γ heißt *Bogenlänge* von γ.

1.5 Satz. *Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist γ rektifizierbar und es gilt*

$$L_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_a^b (|\gamma_1'(t)|^2 + \ldots + |\gamma_n'(t)|^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Insbesondere hat der Graph einer C^1-Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Länge

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt.$$

Zum Beweis verwenden wir das Integral eines n-Tupels stetiger Funktionen. Setzt man

$$\int_a^b \gamma(t)dt := (\int_a^b \gamma_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)dt),$$

so gilt

$$\|\int_a^b \gamma(t)dt\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|dt,$$

denn

$$\begin{aligned} \|\int_a^b \gamma(t)dt\|^2 &= (\int_a^b \gamma(t)dt|v) \quad \text{mit} \quad v = \int_a^b \gamma(t)dt \in \mathbb{R}^n \\ &= \int_a^b (\gamma(t)|v)dt \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|dt\|v\|. \end{aligned}$$

Beweis. Die Partition P sei gegeben durch $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert

$$\begin{aligned} L_{P,\gamma} &= \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^k \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt =: L. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Daher ist γ rektifizierbar und es gilt $L_\gamma \leq L$.
In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass $L_\gamma = L$ gilt. Hierzu genügt es zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Partition $P : a = t_0 < \ldots < t_k = b$ von $[a, b]$ existiert mit

$$L_{P,\gamma} \geq L - \varepsilon.$$

Da γ' auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein n-Tupel $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ von Treppenfunktionen mit

$$\|\gamma'(t) - \varphi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad t \in [a, b].$$

Wähle nun eine Partition $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ von $[a, b]$, so dass jedes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ auf den Intervallen (t_{j-1}, t_j) für $j = 1, \ldots, k$ konstant ist.
Für dieses P gilt die Behauptung, denn zunächst gilt für alle $j = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt\| &\geq \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(t)dt\| - \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} (\gamma'(t) - \varphi(t))dt\| \\ &\geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\varphi(t)\|dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t) - \varphi(t)\|dt \\ &\geq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\varphi(t)\|dt - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Aufsummieren über $j = 1, \dots, k$ ergibt mit (1.1)

$$\begin{aligned} L_{P,\gamma} &\geq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \int_a^b \|\varphi(t) - \gamma'(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq L - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.6 Beispiele. a) Wir berechnen die Länge des *Zykloidenbogens*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

wie folgt. Da γ differenzierbar ist mit Ableitung $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, gilt

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(\frac{t}{2}).$$

Daher ist

$$L_{\gamma_{|[0,2\pi]}} = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\frac{t}{2})| dt = -4\cos(\frac{t}{2})|_0^{2\pi} = 8.$$

b) Ein Beispiel einer nicht rektifizierbaren Kurve ist durch

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2 \cos \frac{\pi}{t^2}$$

gegeben. Um dies einzusehen, definieren wir die Partition P von $[0,1]$ als $P : 0 = t_0, n^{-1/2}, (n-1)^{-1/2}, \dots, 2^{-1/2}, 1$ und bemerken, dass $\gamma(n^{-1/2}) = \frac{(-1)^n}{n}$ gilt. Daher gilt $L_{P,\gamma} > 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ und es ist $L_\gamma = \infty$.

Der Begriff der rektifizierbaren Kurve ist sehr eng mit dem Konzept der Funktionen von beschränkter Variation verwandt. Genauer gesagt, definieren wir zu Funktionen $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sowie zu Zerlegungen P von I die *Variation* von f durch

$$\mathrm{var}_{P,f} := \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|.$$

Das Supremum über alle Zerlegungen, d.h.

$$V_a^b(f) := \sup_P \mathrm{var}_{P,f}$$

heißt *Totalvariation* von f über I. Gilt $V_a^b(f) < \infty$, so heißt f von *beschränkter Variation* auf I. Die Klasse aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $BV(I)$.
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Kurve, so gilt also $L_f = V_a^b(f)$. Im folgenden Lemma stellen wir grundlegende Eigenschaften von Funktionen $f \in BV[a,b]$ bereit.

1.7 Lemma. *Für Funktionen $f \in BV[a,b]$ gelten die folgenden Aussagen:*
a) $BV[a,b] \subset B[a,b]$ und es gilt $|f(a) - f(b)| \leq V_a^b(f)$
b) Der Raum $BV[a,b]$ ist ein Vektorraum und sogar eine Algebra und es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} V_a^b(\lambda f + \mu g) &\leq |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g), \quad \lambda, mu \in \mathbb{R}, f, g \in BV[a,b] \\ V_a^b(fg) &\leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f). \end{aligned}$$

c) Für $a < c < b$ gilt

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

d) Ist f monoton in $[a,b]$, so gilt $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
e) Ist $f \in C^1([a,b])$, so gilt $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$.

Den nicht sehr schwierigen Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Im folgenden Satz charakterisieren wir Funktionen von beschränkter Variation als diejenigen Funktionen, welche sich als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellen lassen .

1.8 Satz. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn $f = g - h$ für zwei in $[a,b]$ monoton wachsende Funktionen g und h gilt.*

Beweis. Für $f \in BV[a,b]$ und $t \in [a,b]$ setze $g(t) := V_a^t(f)$. Für $a \leq c < d \leq b$ gilt nach Lemma 1.7 c)

$$0 \leq V_c^d(f) = V_a^d(f) - V_a^c(f) = g(d) - g(c),$$

welches bedeutet, dass g monoton wachsend ist. Weiter gilt nach Lemma 1.7 a)

$$f(d) - f(c) \leq V_c^d(f) = g(d) - g(c)$$

und somit gilt für $h := g - f$ die Ungleichung $h(c) \leq h(d)$. Also ist auch h monoton wachsend.
Die umgekehrte Richtung folgt direkt aus Lemma 1.7 d) und b).

□

Betrachtet man Kurven $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$, so gilt

$$V_a^b(f_i) \leq L_f \leq V_a^b(f_1) + \ldots + V_a^b(f_n).$$

Somit erhalten wir den zuvor beschriebenen Zusammenhang zwischen Funktionen mit beschränkter Variation und rektifizierbaren Kurven.

1.9 Satz. *Eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Komponentenfunktionen f_i von beschränkter Variation in I sind.*

2 Vektorfelder und Kurvenintegrale

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, so wird diese Abbildung oft auch als *Vektorfeld* bezeichnet. Wir können uns Vektorfelder veranschaulichen, indem wir uns an jedem Punkt $x \in U$ den Vektor $F(x)$ „angeheftet" denken.

Wichtige Beispiele von Vektorfeldern in der Physik sind sogenannte Kraft- oder Geschwindigkeitsfelder. Im Folgenden wollen wir die folgenden Klassen von Vektorfeldern genauer untersuchen.

2.1 Beispiele.
a) *konstante Vektorfelder*. Diese sind durch $F(x) := y$ für ein $y \in \mathbb{R}^n$ definiert.
b) *Zentralfelder*. Ist $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $K := \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$ eine Kugelschale in $\mathbb{R}^n$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt $F : K \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) := g(\|x\|)x$$

Zentralfeld.
c) *Rotationsfelder*. Ist $I = [a, b]$ ein Intervall, $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : a < |x| < b\}$ ein Kreisring in $\mathbb{R}^2$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt $F : K \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) := g(\|x\|)(-x_2, x_1)^T$$

Rotationsfeld.
d) Ein Vektorfeld F heißt *Gradientenfeld*, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $V : U \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\operatorname{grad} V = F.$$

Von besonderer Wichtigkeit sind die Begriffe der Divergenz und Rotation von Vektorfeldern, welche wir wie folgt definieren.

2.2 Definition. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so heißt die Funktion

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

die *Divergenz* von F im Punkt $x \in U$.

Wir überprüfen leicht, dass für C^1-Vektorfelder F und G sowie für skalare Funktionen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$\operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(h \cdot F) = \nabla h \cdot F + h \cdot \operatorname{div} F$$

gelten.

2.3 Definition. Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, so definiert man $\operatorname{rot} F : U \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation* von F, via

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Benützt man das Vektorprodukt aus der Linearen Algebra, so kann man formal auch kurz

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F \quad \text{und} \quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

schreiben. Für stetig differenzierbare Vektorfelder F und G sowie für Funktionen $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gelten dann die folgenden Beziehungen.

a) $\operatorname{rot}(h \cdot F) = h \cdot \operatorname{rot} F - F \times \nabla h$

b) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$

c) $\operatorname{rot}(\nabla h) = 0$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

e) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

Zur Motivation des Begriffs des *Kurvenintegrals* betrachten wir einen Körper, der eine gegebene glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ unter dem Einfluss eines Kraftfelds F durchläuft. Die geleistete Arbeit ist dann gegeben durch das Integral $\int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt$, da für die geleistete Arbeit nur diejenige Komponente der Kraft relevant ist, welche in Richtung der Bewegung zeigt. In Analogie hierzu definieren wir das Kurvenintegral wie folgt.

2.4 Definition. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und f eine auf $\gamma([a,b])$ definierte stetige reellwertige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt, \quad j = 1, \ldots, n,$$

das *Kurvenintegral von f bezüglich x längs γ*. Ist $f = (f_1, \ldots, f_n) : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ stetig, so definieren wir das *Kurvenintegral von f längs γ* durch

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_\gamma f_1(x)dx_1 + \ldots + \int_\gamma f_n(x)dx_n.$$

2.5 Bemerkung. Das Kurvenintegral ist unabhängig von gewählten Parametrisierung der Kurve.

2.6 Beispiel. Will man die Funktion f gegeben durch $f(x_1, x_2) := (x_2, -x_1)^T$ entlang des Halbkreises, d.h. entlang der Kurve γ gegeben durch

$$\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

integrieren, so gilt mit $x = (x_1, x_2)^T$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x)dx &= \int_\gamma f_1(x)dx_1 + \int_\gamma f_2(x)dx_2 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)\cos t dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} dt = -\pi. \end{aligned}$$

2.7 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.
a) Ist F ein Gradientenfeld, d.h. existiert ein Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla V = F$ in U, so heißt V *Potential* von F.
b) Es sei $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = y_0$. Hat für je zwei Punkte $x, y \in U$ das Integral $\int_\gamma F dx$ längs jeder in U von x_0 nach y_0 laufenden Kurve denselben Wert, so heißt das Integral $\int_\gamma F(x)dx$ *wegunabhängig.*

Der folgende Satz charaktierisiert diejenigen Vektorfelder deren Kurvenintegral wegunabhängig ist.

2.8 Satz. *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist das Integral $\int_\gamma F(x)dx$ genau dann wegunabhängig, wenn F ein Gradientenfeld ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_\gamma F(x)dx = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)),$$

wobei V ein Potential von F und $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine Kurve bezeichnet.

Beweis. "$\Longleftarrow$": Ist V ein Potential von F, so gilt

$$\int_\gamma F(x)dx = \int_a^b \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \int_a^b \frac{\mathrm{dV}(\gamma(t))}{\mathrm{dt}} dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)).$$

Die umgekehrte Richtung "$\Longrightarrow$" überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

$\square$

Wir wollen nun der Frage nachgehen wie man auf einfache Art und Weise überprüfen kann, ob F ein Gradientenfeld ist. Eine notwendige Bedingung hierür kann man einfach angeben. Ist nämlich F ein stetig differenzierbares Gradientenfeld, so gilt für das Potential $V \in C^2(U)$ und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i},$$

d.h. es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Wir wollen nun die umgekehrte Frage beantworten, nämlich ob die obige Integrabilitätsbedingung die Wegunabhängigkeit des Integrals impliziert. Es ist nicht überraschend, dass die Antwort auf diese Frage von der Geometrie des Gebietes abhängt. In diesem Zusammhang nennen wir $U \subset \mathbb{R}^n$ ein *Sterngebiet* bezüglich $x_0 \in U$, falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $\overline{x_0 x} \in U$ für alle $x \in U$ gilt. Insbesondere sind konvexe Mengen Sterngebiete.

2.9 Satz. *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet bzgl. $x_0 \in U$ und $F = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzieres Vektorfeld, welches der Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

genügt, so ist F ein Gradientenfeld.

Beweis. Es sei oBdA $x_0 = 0$. Setzt man $V(x) = \sum_{i=1}^n (\int_0^1 f_i(tx)dt)x_i$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 f_i(tx)dt \right) x_i + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 f_i(tx)dt \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(tx)dt \right) x_i + \int_0^1 f_j(tx)dt. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{d}{dt}(tf_j(tx)) = f_j(tx) + t \underbrace{\frac{d}{dt} f_j(tx)}_{=\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(tx)x_i} \overset{\text{Vor.}}{=} f_j(tx) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(tx)x_i$$

und somit gilt

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf_j(tx))dt = tf_j(tx) \,\Big|_{t=0}^{t=1} = f_j(x).$$

$\square$

2.10 Bemerkung. Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Kugel und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so besagt Satz 2.9, dass F genau dann ein Gradientenfeld ist, falls $\operatorname{rot} F = 0$ gilt.