5.8 Beispiele.
Wir betrachten zunächst nochmals die Beispiele aus 5.3.
a) Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Es gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit ist $H_f(0,0)$ positiv definit und f besitzt daher in $(0,0)$ ein lokales Minimum.
b) Für $f(x,y) = x^2 - y^2$ gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $H_f(0,0)$ indefinit und f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Extremum.
c) Als weiteres Beispiel betrachten wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Dann implizieren die Gleichungen

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0,$$

dass $(0,0)$ und $(1,1)$ kritische Punkte von f sind. Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

und daher gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Eigenwerte von $H_f(0,0)$ sind ± 3 und somit ist $H_f(0,0)$ indefinit und f besitzt in $(0,0)$ keins lokales Extremum. Die beiden Eigenwerte von $H_f(1,1)$ sind hingegen strikt positiv, welches bedeutet, dass $H_f(1,1)$ positiv definit ist und f in $(1,1)$ ein lokales Minimum besitzt.

6 Differentation parameterabhägiger Integrale

In der Physik werden häufig Variationsprinzipien angewandt, um zum Beispiel die Bahn, längs deren sich ein System bewegt, als Extremale eines bestimmten Variationsproblems zu bestimmen. Für die rigorose Behandlung solcher Variationsprobleme benötigen wir Differenzierbarkeitseigenschaften parameterabhängiger Integrale. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Integrale mit kompakten Integrationsbereichen; den allgemeinen Fall nicht kompakter Inegrationsbereiche werden wir erst im Rahmen des Lebesgue-Integrals behandeln.

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $J \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten eine Funktion $f : U \times J \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in U$ die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig ist und definieren die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_J f(x,t)dt.$$

Dann gilt der folgende Satz

6.1 Theorem. (Differentation von parameterabhängigen Integralen).
a) Ist f stetig auf $U \times J$, so ist F stetig auf U.
b) Ist f zusätzlich nach x_i stetig partiell differenzierbar, so ist F nach x_i steti partiell differenzbar und man darf „unter dem Integral differenzieren“, d.h. es gilt

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \int_J \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i} dt.$$

Beweis. a) Wir bemerken zunächst, dass es genügt den Satz für $U \subset \mathbb{R}$ zu beweisen. Es sei $x \in U \in \mathbb{R}$ und $(x_j) \subset U$ eine Folge mit $x_j \to x$. Dann ist f auf der kompakten Menge $J \times \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x_k,t) - f(x,t)| < \varepsilon$ für alle $x \in U$, falls nur $|x_k - x| < \delta$ gilt. Dies bedeutet, dass $f(x_k, \cdot)$ gleichmäßig auf J gegen $f(x, \cdot)$ konvergiert. Nach Satz V.2.13 gilt daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_J f(x_k,t)dt = \int_J f(x,t)dt,$$

und somit ist F stetig auf U.
b) Es sei $K \subset U$ eine kompakte Menge mit $x \in K$. Auf dem Kompaktum $K \times J$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| < \varepsilon$ für alle $|x - \tilde{x}| \le \delta$. Nach dem klassischen Mittelwertsatz IV.2.4 existiert ein $\xi_k \in (x, x_k)$ mit

$$\frac{f(x_k,t) - f(x,t)}{x_k - x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k, t).$$

Wir wählen nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x - x_k| < \delta$ gilt für alle $k \ge N$. Damit gilt auch $|x - \xi_k| < \delta$ und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{f(x_k,t) - f(x,t)}{x_k - x}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k,t)\right| < \varepsilon.$$

Somit konvergiert

$$\frac{f(x_k,\cdot) - f(x,\cdot)}{x_k - x} \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$$

gleichmäßig auf J. Nach Satz V.2.13 konvergieren daher die zugehörigen Integrale, d.h. es gilt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F(x_k)-F(x)}{x_k-x}=\lim_{k\to\infty}\int_J\frac{f(x_k,t)-f(x,t)}{x_k-x}dt=\int_J\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Somit ist F partiell nach x differenzierbar und es gilt

$$F'(x)=\int_J\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Schließlich ist F' stetig nach Aussage a), da $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig auf $U\times J$ vorausgesetzt war.

$\square$

Als erste Anwendung dieses Satzes beweisen wir die Vertauschbarkeit für iterierte Integrale.

6.2 Satz. *Ist $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)dt\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)dx\right)dt.$$

Beweis. Wir definieren Funktionen $F_1,F_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch

$$F_1(\xi):=\int_a^\xi\left(\int_c^d f(x,t)dt\right)dx,\quad F_2(\xi):=\int_c^d\left(\int_a^\xi f(x,t)dx\right)dt.$$

Da der Integrand von F_1 stetig auf $[a,b]$ ist, ist F_1 nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit $F'(\xi)=\int_c^d f(\xi,t)dt$. Die Funktion F_2 ist nach dem obigen Theorem 6.1 ebenfalls differenzierbar mit $F_2'(\xi)=\int_c^d f(\xi,t)dt$. Daher gilt $F_1'=F_2'$ und wegen $F_1(a)=F_2(a)=0$ auch $F_1=F_2$.

$\square$

Durch wiederholtes Anwenden des obigen Verfahrens kann man das iterierte Integral einer stetigen Funktion auf einem Quader $Q:=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_k,b_k]\subset\mathbb{R}^k$ als

$$\int_Q f(x)dx:=\int_{a_k}^{b_k}\left(\ldots\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\right)dx_2\ldots\right)dx_k$$

definieren.

Im Folgenden betrachten wir die sogenannte Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung. Hierunter versteht man die folgende Problematik. Zwischen zwei koaxialen Kreislinien soll diejenige Rotationsfläche bestimmt werden, welche kleinsten Flächeninhalt besitzt. Genauer gesagt, suchen wir zu zwei gegebenen Punkten $(a,\alpha$

und (b,β) mit $a<b$ eine stetig differenzierbare Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ mit $f(a)=\alpha$ und $f(b)=\beta$ so, dass die durch Rotation ihres Graphen um die x-Achse entstehende Fläche möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Den Flächeninhalt einer solchen Fläche werden wir später als

$$F(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

bestimmen.

Ausgehend von diesem Beispiel betrachten wir allgemeiner eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$L:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (t,y,p)\mapsto L(t,y,p),$$

setzen für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$V:=\{\varphi\in C^2[a,b]:\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta\}$$

und definieren

$$J:V\to\mathbb{R},\ J(\varphi):=\int_a^b L(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt.$$

Gesucht wird ein $\varphi\in V$, in dem J ein Extremum annimmt. Im obigen Beispiel wäre also $L(t,x,p)=x\sqrt{1+p^2}$. Das hier formulierte Extremalproblem ist von besonderer Art, da der Definitionsbereich von J eine Teilmenge des unendlich-dimensionalen Vektorraums V ist.
Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremalstelle von J an.

6.3 Satz. (Eulersche Differentialgleichung). *Gilt $J(\varphi)=\inf_{\psi\in V}J(\psi)$ für ein $\varphi\in V$, so gelten die Eulerschen Differentialgleichungen*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t,\varphi(t),\varphi'(t))=\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t)).$$

Beweis. Es sei $\varphi\in V$ mit $J(\varphi)\le J(\psi)$ für alle $\psi\in V$ und $g\in C^2[a,b]$ eine Funktion mit $g(a)=0=g(b)$. Dann ist $\varphi+\varepsilon g\in V$ für alle $\varepsilon\in\mathbb{R}$ und es gilt

$$J(\varphi)\le J(\varphi+\varepsilon g).$$

Setzt man $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},F(\varepsilon):=J(\varphi+\varepsilon g)$, so hat F in $\varepsilon=0$ ein Minimum; es gilt also $\frac{dF}{d\varepsilon}(0)=0$. Nach Satz 6.1 dürfen wir unter dem Integral differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon)&=\int_a^b\frac{d}{d\varepsilon}L(t,\varphi+\varepsilon g,\varphi'+\varepsilon g')dt\\&=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi+\varepsilon g,\varphi'+\varepsilon g')g+\frac{\partial L}{\partial p}(t,\varphi+\varepsilon g,\varphi'+\varepsilon g')g'dt\end{aligned}$$

Integriert man den zweiten Term auf der rechten Seite partiell, so erhalten wir

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial p} g' dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial p} g\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b g(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right) dt$$

und somit gilt

$$0 = \frac{dF}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi,\varphi') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)(t,\varphi,\varphi')\right] g dt$$

für jede Funktion $g \in C^2[a,b]$ mit $g(a) = g(b) = 0$. Die Behauptung folgt nun aus dem folgenden Lemma.

□

6.4 Lemma. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gilt für jede Funktion $g \in C^2[a,b]$ mit $g(a) = 0 = g(b)$*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0,$$

so ist $f \equiv 0$ auf $[a,b]$.

Beweis. Da f stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $f \equiv 0$ auf (a,b) gilt. Wir nehmen an, dass $f(x) \neq 0$ ist für ein $x \in (a,b)$. OBdA sei $f(x) = \varepsilon > 0$. Die Stetigkeit von f impliziert, dass eine Umgebung $U_\delta(x)$ von x existiert mit $f(t) \geq \varepsilon/2$ für alle $t \in U_\delta(x)$. Wir wählen nun eine Funktion $g \in C^2[a,b]$ mit $g \geq 0$ und $g(x) > 0$ und $g(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]\backslash U_\delta(x)$. Daher gilt

$$0 = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)g(t)dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)dt}_{>0} > 0.$$

Widerspruch!

□

6.5 Beispiel.
Wie oben sei $V = \{\varphi \in C^2[a,b] : \varphi(a) = \alpha, \text{ und } \varphi(b) = \beta\}$. Motiviert durch die Bogenlänge von Kurven betrachten wir

$$J(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt.$$

Dann gilt $L(t,y,p) = \sqrt{1+p^2}$,

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p}(t,y,p) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

und die Eulersche Differentialgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1+\varphi'(t)^2}} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Deshalb gilt

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \varphi'\frac{\varphi'\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

und somit $\varphi''(t) = 0$. Damit ergibt sich

$$\varphi(t) = \alpha + \beta t$$

und wir haben gezeigt, dass die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt.

Im Folgenden verallgemeinern wir die obige Strategie auf die Situation von n-Funktionen. Die Funktion L ist dann von der Form

$$L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto L(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$$

und für V gilt

$$V = \{f \in C^2([a,b], \mathbb{R}^n) : f(a) = \alpha, f(y) = \beta\}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Definiert man $J : V \to \mathbb{R}$ via

$$J(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))dt,$$

so impliziert ein Minimum von J in $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in V$, dass

$$\frac{d}{dt}L_{p_i}(t, \varphi, \varphi') - L_{y_i}(t, \varphi, \varphi') = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt.
Betrachtet man ein physikalisches System beschrieben durch die Zeitkoordinate t und Ortskoordinaten $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, so heißt

a) $L(t, \varphi, \varphi')$ die *Lagrange-Funktion* und

b) es gilt $L = T - U$, wobei $T = T(\varphi, \varphi')$ die *kinetische Energie* und $U = U(\varphi)$ die *potentielle Energie* des Systems beschreibt.

c) Ferner wird $J(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt$ in der Physik auch *Wirkungsintegral* genannt.

Das *Hamiltonsches Prinzip* der Mechanik besagt, dass zwischen zwei Zeitpunkten t_0, t_1 die Bewegung des Systems so verläuft, dass das Integral

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} T(\varphi, \varphi') - U(\varphi))dt,$$

minimal wird. Die Eulerschen Differentialgleichungen impliziert dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi_i'} - \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(T - U) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

In der Mechanik heißen diese Gleichungen die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen*. Betrachten wir speziell die Bewegung eines Massenpunkts unter dem Einfluss eines nur vom Ort abhängigen Potentials U, so gilt mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $v = (x_1', x_2', x_3')$

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} v_i^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i')^2(t) \quad \text{und } L(x, v) = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - U(x_1, x_2, x_3).$$

Da die Lagrangefunktion L nicht explizit von t abhängt, gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \text{und } \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i$$

und die Eulersche Differentialgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}(mx_i'(t)) + \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_i(t)) = 0.$$

Daher lauten die Bewegungsgleichung in diesem Fall

$$mx_i'' = -\mathrm{grad}\, U(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

6.6 Beispiel. (Rotationsminimalflächen). Wir betrachten nun das eingangs erwähnte Beispiel der Rotationsfläche und definieren hierzu J als

$$J(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\sqrt{1 + \varphi'(t)^2}dt. \tag{6.1}$$

Die Eulersche Differentialgleichung lautet

$$L_{pp}\varphi'' + L_{py}\varphi' + L_{pt} - L_y = 0.$$

Ist L unabhängig von t, so gilt für $E_\varphi := L_p(\varphi, \varphi')\varphi' - L(\varphi, \varphi')$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_\varphi &= (L_{py}\varphi'^2 + L_{pp}\varphi'\varphi'' + L_p\varphi'') - L_y\varphi' - L_p\varphi'' \\ &= \varphi'(L_{py}\varphi' + L_{pp}\varphi'' - L_y) = 0, \end{aligned}$$

und jede Lösung der Eulerschen Differentialgleichung erfüllt in diesem Fall

$$E_\varphi = L_p(\varphi, \varphi')\varphi' - L(\varphi, \varphi') = \text{constant}.$$

In der Physik interpretiert man E_φ als die Energie des Systems. Betrachtet man nun speziell J definiert wie in (6.1), so gilt

$$L(t, x, p) = x\sqrt{1 + p^2}$$

und $\frac{\partial L}{\partial p}(t, x, p) = \frac{xp}{\sqrt{1+p^2}}$ und $\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{1 + p^2}$. Die Eulersche Gleichung lautet daher

$$\frac{d}{dt}(\varphi\frac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}) = \sqrt{1 + \varphi'^2} \tag{6.2}$$

und da L unabhängig von t ist, gilt $L_p(\varphi, \varphi')\varphi' - L(\varphi, \varphi') = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\frac{xp^2}{\sqrt{1 + p^2}} - x\sqrt{1 + p^2} = -c$$

und somit

$$\frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} = \text{constant}.$$

Damit vereinfacht sich die Eulersche Gleichung zu

$$c\varphi'' = \frac{1}{c}\varphi \Leftrightarrow \varphi'' - \frac{1}{c^2}\varphi = 0$$

und wir erhalten als Lösung von (6.2)

$$\varphi(t) = c\cosh(\frac{1}{c}(t - t_0)).$$

Diese Funktionen heißen auch *Kettenlinien.* Schließlich bestimmen wir noch die Konstanten c und t_0 für den Fall $\alpha = \beta$ und $a = -b$ wie folgt. Setzt man aus Symmetriegründen $t_0 = 0$ so haben wir die Gleichung

$$\frac{\cosh b/c}{b/c} = \frac{\alpha}{b}$$

zu lösen. Es *existiert* dann ein $c\ in\mathbb{R}$, so dass für $\alpha/b = c$ genau eine Lösung dieser Gleichung exisitiert. Zusammengefasst haben wir bewiesen, dass das Problem der Rotationsminimalfläche für dieses c und $\alpha/b = c$ höchstens eine Lösung besitzt.