4 Der Satz von Taylor

Wir erinnern zunächst an den Satz von Taylor in der eindimensionalen Situation. Ist $f \in C^{m+1}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $0, x \in J$, so gilt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + R_{m+1}f(x,0),$$

wobei $R_{m+1}f(x,0)$ das Restglied der Taylorapproximation bezeichnete. In der Lagrangeschen Darstellung hatte es die Form

$$R_{m+1}f(x,0) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}x^{m+1}$$

für ein $\xi \in (0,x)$. Die obige Approximation hatte das Ziel eine gegebene, glatte Funktion durch ein Polynom in der Nähe von $x = 0$ „gut" zu approximieren. Wir betrachten im Folgenden das analoge Problem für Funktionen in mehreren Variablen, genauer gesagt für Funktionen $f \in C^{m+1}(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge bezeichnet. Gesucht ist ein Polynom p in n Variablen der Ordnung m, d.h. $p(h) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha h^\alpha$ für $h = (h_1, \ldots, h_n)$, welches die Funktion f in der Nähe von $x = 0$ „gut" approximiert.

Der folgende Satz von Taylor besitzt äußerlich exakt dieselbe Gestalt wie in der eindimensionalen Situation.

4.1 Theorem. (Satz von Taylor in n Variablen). *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $a, x \in U$ mit $\overline{ax} \subset U$ und $f \in C^{m+1}(U)$. Dann existiert ein $\xi \in \overline{ax}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|\alpha| \le m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha \\ &=: T_m f(x,a) + R_{m+1} f(x,a). \end{aligned}$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in zwei Schritte.
Schritt 1: Für $h := (h_1, \ldots, h_n) := x - a \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \; F(t) := f(a + th)$$

nach der Kettenregel $(m+1)$-mal stetig differenzierbar mit

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a+th) \cdot h_i = (\nabla h) f(a+th).$$

Dasselbe Argument angewandt auf $g := (\nabla h) f$ liefert

$$F''(t) = \frac{d}{dt} g(a+th) = (\nabla h) g(a+th) = (\nabla h)^2 f(a+th),$$

und via Induktion erhalten wir $F \in C^{m+1}[0,1]$ mit

$$F^{(\ell)}(t) = (\nabla h)^\ell f(a+th), \quad \ell = 0, \ldots, m+1, \ t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Schritt 2: Wir wenden nun den Satz von Taylor in einer Variablen auf die Funktion F an und erhalten wegen (4.1) und Beispiel 3.4

$$\begin{aligned}
f(x) = F(1) &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{F^{(\ell)}(0)}{\ell!} + \frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{(\nabla h)^\ell f(a)}{\ell!} + \frac{(\nabla h)^{m+1} f(a+\tau h)}{(m+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h^\alpha D^\alpha f(a)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{h^\alpha D^\alpha f(a+\tau h)}{\alpha!} \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha
\end{aligned}$$

für ein geeignetes $\tau \in [0,1]$ und damit $\xi := a + \tau h \in \overline{ax}$.

$\square$

.

4.2 Bemerkungen.
a) Analog zum Fall einer Variablen, nennt man

$$T_m f(x,a) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

das *Taylorpolynom* von f der *Ordnung* m im *Enwicklungspunkt* a. Ferner heißt

$$R_{m+1} f(x,a) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

das *Restglied*, hier ausgedrückt in der *Lagrangeschen Form*.
b) Für $m = 0$ ist der Satz von Taylor identisch mit dem Mittelwertsatz.
c) Wir geben noch explizit das Taylorpolynom zweiter Ordnung in n Variablen an. Wegen $Df(a)h = f'(a)h$ und $D^2 f(a)(h,h) = h^T \cdot f''(a) \cdot h$ gilt für das Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$T_2 f(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T f''(a)(x-a)$$

und explizit

$$T_2 f(x,a) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

d) Für den Spezialfall $n = 2$ und $m = 3$ lautet das Taylorpolynom $T_3 f$ an der Stelle (x, y)

$$\begin{aligned} T_3 f((x,y),a) &= f(a) + f_x(a)(x-a_1) + f_y(a)(y-a_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(a)(x-a_1)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(a)(y-a_2)^2 + f_{xy}(a)(x-a_1)(y-a_2) \\ &\quad + \frac{1}{6} f_{xxx}(a)(x-a_1)^3 + \frac{1}{6} f_{yyy}(a)(y-a_2)^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xxy}(a)(x-a_1)^2(y-a_2) + \frac{1}{2} f_{xyy}(a)(x-a_1)(y-a_2)^2. \end{aligned}$$

e) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^m(U)$ und $a \in U$, so gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m(x)}{\|x-a\|_2^m} = 0.$$

Um dies einzusehen, wählen wir zunächst δ so klein, dass $U_\delta(a) \subset U$ gilt. Nach dem Satz von Taylor existiert für alle $x \in U_\delta(a)$ ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x) - T_m f(x,a) &= (f(x) - T_{m-1} f(x,a)) + (T_{m-1} f(x,a) - T_m f(x,a)) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(a + \tau(x-a)) - D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Da $\frac{|(x-a)^\alpha|}{\|(x-a)\|_2^m} \leq 1$ für alle α mit $|\alpha| = m$ und da $D^\alpha f$ für solche α stetig ist, folgt

$$0 \leq \frac{f(x) - T_m(x)}{\|x-a\|^m} \leq \sum_{|\alpha|=m} \frac{|D^\alpha f(a + \tau(x-a)) - D^\alpha f(a)|}{\alpha!} \xrightarrow{x \to a} 0.$$

4.3 Beispiel. Im folgenden Beispiel berechnen wir explizit das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \sin \frac{x+2y}{2} + \cos \frac{2x-y}{2}$$

im Punkt $(0,0)$. Nach Bemerkung 4.2 c) gilt

$$T_2 f((x,y),(0,0)) = f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + \frac{x^2}{2} f_{xx}(0,0) + \frac{y^2}{2} f_{yy}(0,0) + xy f_{xy}(0,0).$$

Berechnet man die jeweiligen Ableitungen im Punkt $(0,0)$, so ergibt sich

$$T_2 f((x,y),(0,0)) = 1 + \frac{x}{2} + y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{xy}{4}.$$

Ausgehend vom Mittelwertsatz 2.11 in Integralform , d.h.

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 Df(a+th)h dt \tag{4.2}$$

mit $h = x - a$, wollen wir noch das Restglied der Taylorentwicklung in Integralform angeben. Der Taylorsche Satz lautet dann wie folgt.

4.4 Korollar. (Satz von Taylor mit Restglied in Integralform). *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $a, x \subset U$ mit $\overline{ax} \in U$ und $f \in C^{m+1}(U)$. Dann gilt*

$$f(x) \quad = \quad \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}((\nabla h)^{m+1} f)(a+th)dt$$

für $h = x - a$.

Um dies einzusehen, notieren wir zunächst, dass die Behauptung für $m = 0$ genau mit dem obigen Mittelwertsatz in Integralform übereinstimmt.
Für den Fall $m = 1$ definieren wir für $t \in [0, 1]$ zwei Funktion u, v durch $u(t) := Df(a+th)h$ und $v(t) := t-1$. Die Produktregel zusammen mit der obigen Darstellung (4.2) impliziert, dass

$$f(x) = f(a) + Df(a)h + \int_0^1 (1-t)((\nabla h)^2 f)(a+th)dt$$

gilt. Für $m \geq 2$ folgt die Behauptung via eines Induktionsbeweises, welchen wir dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

4.5 Bemerkung. Wir wollen an dieser Stelle noch den Begriff der Tangentialebene diskutieren. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U)$ eine Funktion, so sagen wir dass durch die Gleichung $z = f(x), x \in U$, eine Fläche F in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum dargestellt wird. Dabei ist graph $f = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}, z = f(x), x \in U\}$.
Wir haben gesehen, dass das Taylorpolynom $T_1 f(x, a)$ als affine Funktion betrachtet werden kann, welche f in der Nähe von a approximiert. Die durch

$$z = T_1 f(x, a) = f(a) + Df(a)(x-a)$$

dargestellte Hyperebene heißt *Tangentialebene* an die Fläche $z = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$. Der Vektor

$$\nu = (\nabla f(a), -1)$$

heißt *Normale* der Tangentialebene im Punkt $(a, f(a))$. Im Fall $n = 1$ benutzt man die Bezeichnung Kurve anstatt Fläche und Tangente anstatt Tangentialebene. In diesem Fall haben wir die Gleichung der Tangente an die Kurve $z = f(x)$, nämlich

$$z = f(a) + f'(a)(x-a)$$

schon in Kapitel IV kennengelernt. Im Fall $n = 2$ lautet die Gleichung der Tangetialebene im Punkt (a_1, a_2)

$$z = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f_y(a_1, a_2)(y - a_2).$$

5 Lokale Extrema

In diesem Abschnitt untersuchen wir hinreichende Kriterien für lokale Maxima und Minima von Funktionen mehrerer reeller Variablen. Wir beginnen mit der Definition eines lokalen Extremwerts.

5.1 Definition. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $a \in U$ heißt *lokales Maximum (Minimum)* von f, falls eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von a existiert mit

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{für alle } x \in \tilde{U} \quad (f(x) \geq f(a) \quad \text{für alle } x \in \tilde{U}).$$

Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder Minimum.

5.2 Satz. *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine in $a \in U$ partiell differenzierbare Funktion. Besitzt f in a ein lokales Extremum, so gilt*

$$\mathrm{grad} f(a) = 0.$$

Beweis. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass die Funktionen g_i definiert durch

$$g_i(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}, \quad g_i(t) = f(a + te_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

alle wohldefiniert und differenzierbar in $t = 0$ sind. Da alle Funktionen g_i in $t = 0$ ein lokales Extremum besitzen, gilt nach Satz IV.3.8 aus Analysis I

$$g_i'(0) = \partial_i f(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

□

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $a \in U$ und gilt $\mathrm{grad} f(a) = 0$, so heißt a *kritischer Punkt* von f.

5.3 Beispiele.
a) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^2 + y^2$. Dann gilt

$$\mathrm{grad} f(x) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Weiter gilt $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, welches bedeutet dass f in $(0, 0)$ ein isoliertes Minimum besitzt.

b) Betrachtet man die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 - y^2$, so gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Ferner gilt $f(x,0) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0,y) < 0$ für alle $y \neq 0$. Dies bedeutet, dass f in $(0,0)$ kein lokales Extremum besitzt, sondern einen sogenannten Sattelpunkt.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, wie man die oben skizzierten Fälle systematisch unterscheiden kann. Zunächst sei an das hinreichende Kriterium für Extremwerte von Funktionen einer reellen Variablen aus Analysis I erinnert. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Funktion und a kritischer Punkt von f. Dann ist a

- ein lokales Minimum, falls $f''(a) > 0$ und
- ein lokales Maximum, falls $f''(a) < 0$

gilt. Für Funktionen in mehreren Variablen ersetzen wir $f''(a)$ durch die Hesse-Matrix $(\partial_i \partial_j f(a))_{n \times n}$. Diese wurde in 3.1 für eine Funktion $f \in C^2(U)$ im Punkt $a \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, definiert als

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_1\partial_2 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \partial_2\partial_1 f(a) & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

5.4 Bemerkungen.
a) Aufgrund des Satzes von Schwarz 3.2 ist $H_f(a)$ eine symmetrische Matrix.
b) Die Polynomformel 3.4 c) impliziert für $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(U)$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{h^\alpha D^\alpha f(a)}{\alpha!} &= (h_1 D_1 + \ldots + h_n D_n)^2 f(a) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j D_i D_j f(a) = (h | H_f(a) h). \end{aligned}$$

Somit gilt nach dem Satz von Taylor und Bemerkung 4.2 c)

$$f(x) = f(a) + (\operatorname{grad} f(a)^T | (x-a)) + \frac{1}{2}((x-a), H_f(a)(x-a)) + r(x), \quad x \in U$$

mit $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{||x-a||^2} = 0$.

Zur Bestimmung von Extremwerten benötigen wir ferner die folgende Begriffe aus der Linearen Algebra.

5.5 Definition. Eine symmetrische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ heißt
a) *positiv definit*, falls $(x|Tx) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,
b) *negativ definit*, falls $(x|Tx) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,
c) *indefinit*, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $(x|Tx) > 0$ und $(y|Ty) < 0$.

Die Eigenschaft einer Matrix T positiv bzw. negativ definit zu sein, lässt sich, wie im folgenden Satz beschrieben, insbesondere auch durch die Vorzeichen der Eigenwerte von T charakterisieren.

5.6 Satz. *Für eine symmetrische Matrix $T \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:*

$$\begin{aligned} a) T \text{ ist positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } T \text{ sind } > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kk} \end{pmatrix}_{k\times k} > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \; T \text{ ist negativ definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } T \text{ sind } < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (-1)^k \det \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{k1} & \cdots & t_{kk} \end{pmatrix}_{k\times k} > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T \text{ ist indefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad T \text{ besitzt positive und negative Eigenwerte} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{obige Unterdeterminaanten sind alle } \neq 0 \text{ und genügen} \\ &\quad\quad weder der Bedingung unter a) noch der unter b) \end{aligned}$$

Für den Beweis verweisen wir auf die Lineare Algebra.

5.7 Theorem. (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema).
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$ eine Funktion und $a \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Ist $H_f(a)$ positiv definit, so besitzt f in a ein lokales Minimum.

b) Ist $H_f(a)$ negativ definit, so besitzt f in a ein lokales Maximum.

c) *Ist $H_f(a)$ indefinit, so besitzt f in a kein lokales Extremum.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.4 b) und da grad $f(a) = 0$ ist, gilt für $h := x - a$ mit $x \in U$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(h, H_f(a)h) + r(x)$$

mit $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|h\|^2} = 0$. Dies bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $0 \le |r(x)| < \varepsilon\|h\|^2$ für alle $h \in U_\delta(0) := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \le \delta\}$.
a) Nach Voraussetzung ist $H_f(a)$ positiv definit. Da die stetige Funktion

$$h \mapsto (h|H_f(a)h)$$

auf der kompakten Einheitssphäre $S := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ ein Minimum annimmt, existiert ein $v_0 \in S$ mit

$$(v|H_f(a)v) \ge (v_0|H_f(a)v_0) =: m > 0$$

für alle $v \in S$. Setzt man $v := \frac{h}{\|h\|}$ für $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, so gilt

$$(h|H_f(a)h) \ge m\|h\|^2 \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wählen nun $\delta > 0$ so klein, dass $\frac{m}{4}\|h\|^2 > |r(x)| \ge 0$ für alle $h = x - a \in U_\delta(0)$ gilt. Daher ist

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{\text{Taylor}}{=} f(a) + \frac{1}{2}\underbrace{(h|H_f(a)h)}_{\ge m\|h\|^2} + \underbrace{r(x)}_{> -\frac{m}{4}\|h\|^2} > f(a) + \frac{m}{2}\|h\|^2 - \frac{m}{4}\|h\|^2 \\ &= f(a) + \frac{m}{2}\|h\|^2 > f(a), \quad h \in U_\delta(0), \end{aligned}$$

und f besitzt somit in a ein lokales Minimum.
b) Die Aussage b) erhalten wir durch Anwenden von a) auf $-f$.
c) Nach Voraussetzung existieren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $(v|Hv) > 0$ und $(w|Hw) < 0$. Wir wählen nun $\delta > 0$ so, dass $a + tv \in U$ und $a + tw \in U$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$ gilt und setzen

$$\begin{aligned} F_v : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \quad F_v(t) &:= f(a + tv) \\ F_w : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \quad F_w(t) &:= f(a + tw). \end{aligned}$$

Die Funktionen F_v und F_w sind zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$F_v'(0) = \nabla f(a) \cdot v = 0, \quad F_w'(0) = \nabla f(a) \cdot w = 0,$$

sowie

$$F_v''(0) = (\nabla v)^2 f(a) = (v|H_f(a)v) > 0, \quad F_w''(0) = (\nabla w)^2 f(a) = (w|H_f(a)w) < 0.$$

Dies bedeutet, dass F_v in $t = 0$ ein lokales Minimum und F_w in $t = 0$ ein lokales Maximum besitzt, welches zeigt, dass f in a kein lokales Extremum besitzen kann.

□

5.8 Beispiele.
Wir betrachten zunächst nochmals die Beispiele aus 5.3.
a) Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Es gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit ist $H_f(0,0)$ positiv definit und f besitzt daher in $(0,0)$ ein lokales Minimum.
b) Für $f(x,y) = x^2 - y^2$ gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $H_f(0,0)$ indefinit und f besitzt in $(0,0)$ kein lokales Extremum.
c) Als weiteres Beispiel betrachten wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Dann implizieren die Gleichungen

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0,$$

dass $(0,0)$ und $(1,1)$ kritische Punkte von f sind. Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

und daher gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Eigenwerte von $H_f(0,0)$ sind ± 3 und somit ist $H_f(0,0)$ indefinit und f besitzt in $(0,0)$ keins lokales Extremum. Die beiden Eigenwerte von $H_f(1,1)$ sind hingegen strikt positiv, welches bedeutet, dass $H_f(1,1)$ positiv definit ist und f in $(1,1)$ ein lokales Minimum besitzt.

6 Differentation parameterabhägiger Integrale

In der Physik werden häufig Variationsprinzipien angewandt, um zum Beispiel die Bahn, längs deren sich das System bewegt, als Extremale eines bestimmten Variationsproblems zu bestimmen. Für die rigorose Behandlung solcher Variationsprobleme benötigen wir Differenzierbarkeitseigenschaften parameterabhängiger Integrale. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Integrale mit kompakten Integrationsbereichen; den allgemeinen Fall nicht kompakter Inegrationsbereiche werden wir erst im Rahmen des Lebesgue-Integrals behandeln.