3 Kompaktheit

Die von uns im Abschnitt III.3 getroffene Definition der Kompaktheit einer Menge, nämlich die Überdeckungskompaktheit, läßt sich auch auf metrische Räume übertragen. Hierbei verstehen wir analog zur Situation in Abschnitt III.3 unter einer *offenen Überdeckung* einer Teilmenge $K \subset M$ eines metrischen Raumes M eine Familie $\{O_i\}_{i\in I}$ offener Mengen in M derart, dass jedes $x \in M$ in mindestens einem der O_i liegt, d.h. dass gilt $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.

3.1 Definition. Eine Teilmenge $K \subset M$ eines metrischen Raums M heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung $\{O_i\}_{i\in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls $i_1, \ldots, i_r$ existieren mit

$$K \subset O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_r}.$$

3.2 Beispiele. a) Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist kompakt
b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in M mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann ist

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt in M.
c) Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist wiederum kompakt, d.h. ist K kompakt in M und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist A kompakt. Der Beweis verläuft wortwörtlich analog zu demjenigen von Lemma III.3.4.

Ausgehend von dieser abstrakten Definition wollen wir nun kompakte Mengen in metrischen Räumen charakterisieren. Wir erinnern uns zunächst an die Situation des $\mathbb{R}^n$, in welcher wir kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nach dem Satz von Heine-Borel als genau diejenigen charakterisiert hatten, welche abgeschlossen und beschränkt sind.
Wir werden in diesem Abschnitt beweisen, dass kompakte Teilmengen eines metrischen Raums weiterhin abgeschlossen und beschränkt sind. Die Umkehrung ist jedoch in allgemeinen metrischen Räumen nicht mehr gültig. Ein Beispiel hierfür ist der Raum $C[0, \pi]$ versehen mit der Supremumsnorm, vgl. das Beispiel 3.5 c) unten.
Wir zeigen im folgenden Theorem jedoch, dass in metrischen Räumen eine Menge genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.

3.3 Theorem. *Für eine nichtleere Teilmenge K eines metrischen Raumes M sind die folgenden Ausagen äquivalent:*

i) K ist kompakt (Überdeckungskompaktheit).

ii) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in K$ (Folgenkompaktheit).

iii) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt einen Häufungspunkt in K.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$: wird exakt wie in Theorem III.3.11 bewiesen.
$ii) \Leftrightarrow iii)$: ist bereits in Satz 2.2 d) bewiesen.
$ii) \Rightarrow i)$: Es sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K.
Schritt 1: es existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in K$ ein $i \in I$ existiert mit $U_\delta(x) \subset O_i$.
Wie nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $U_{1/n}(x_n) \not\subset O_i$ für alle $i \in I$. Nach Voraussetzung besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $x := \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in K$, also $x \in O_j$ für ein $j \in I$. Da O_j offen ist gilt $U_\varepsilon(x) \subset O_j$ für geeignetes $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 2/\varepsilon$ und

$$d(x_l, x) < \varepsilon/2.$$

Dann ist $U_{1/l}(x_l) \subset U_\varepsilon(x) \subset O_j$ im Widerspruch zur obigen Eigenschaft, dass $U_{1/n}(x_n) \not\subset O_i$ für alle $i \in I$.
Schritt 2: Für alle $\delta > 0$ existieren $x_0, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{l=0}^n U_\delta(x_l)$.
Wir nehmen wiederum an, dass die Behauptung falsch sei. Dann existiert $\delta > 0$ mit $K \not\subset \bigcup_{l=0}^n U_\delta(x_l)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$. Wähle nun $x_0 \in K$; dann ist $K \not\subset U_\delta(x_0)$. Es existiert daher ein $x_1 \in K \backslash U_\delta(x_0)$ und es gilt

$$K \not\subset U_\delta(x_0) \cup U_\delta(x_1)$$

Wir erhalten auf diese Weise rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit

$$x_{n+1} \in K\backslash(\bigcup_{l=0}^n U_\delta(x_l)).$$

Diese Folge erfüllt nach Konstruktion

$$d(x_n, x_m) \geq \delta, \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m;$$

daher kann keine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge sein und daher kann auch keine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sein. Widerspruch!
Schritt 3: Wir wählen nun $\delta > 0$ wie in Schritt 1 und Punkte $x_0, \ldots, x_n \in K$ wie in Schritt 2. Dann gilt

$$K \subset \bigcup_{k=0}^n U_\delta(x_k) \subset \bigcup_{l=0}^n O_{i_l}$$

für geeignete $i_0, \ldots, i_l \in I$.

□

Die obige Charakterisierung kompakter Mengen in metrischen Räumen durch die Folgenkompaktheit erlaubt es uns wortwörtlich analog zur Situation von $\mathbb{R}^n$ zu zeigen, dass kompakte Mengen immer abgeschlossen und beschränkt sind. Wir halten diese wichtige Beobachtung explizit im folgenden Korollar fest.

3.4 Korollar. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen und beschränkt.*

3.5 Beispiele. a) Es sei M eine unendliche Menge versehen mit der diskreten Metrik. Dann ist M abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.
b) Wie in Beispiel 1.5 c) betrachten wir den Raum c der konvergenten Folgen versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in c, d.h.

$$\overline{B_1(0)} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c : |x_n| \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

abgeschlossen und beschränkt, aber *nicht* kompakt. Zum Beweis sei $e_n := (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ der n-te Einheitsvektor in c mit 1 an der n-ten Stelle. Dann ist $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ für alle $n \neq m$, welches bedeutet dass die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ keine konvergente Teilfolge besitzt und somit $\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt sein kann.
c) Die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{B_1(0)} := \{f \in C[0, \pi] : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

des Banachraums $(C[0, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht folgenkompakt und daher auch nicht kompakt. Ansonsten hätte die Folge der Funktionen $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ definiert durch $f_j : [0, \pi] \to \mathbb{C}, f_j(x) := e^{2jix}$ eine konvergente Teilfolge, was aber wegen $\|f_k - f_l\|_\infty = 2$ für alle $l \neq k$ unmöglich ist.
d) Allgemeiner kann man zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ eines normierten Vektorraums genau dann kompakt ist, wenn $\dim V < \infty$ gilt.

3.6 Korollar. *Ein kompakter, metrischer Raum (M, d) ist vollständig.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Cauchyfolge. Nach obigem Theorem 3.3 besitzt diese eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, welche in M konvergiert. Setzt man $x := \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$, so existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} d(x_{n_j}, x_m) &\leq \varepsilon/2 \quad \text{für alle } m, j \geq N_0 \text{ und} \\ d(x, x_{n_j}) &\leq \varepsilon/2 \quad \text{für alle } j \geq N_0; \end{aligned}$$

also gilt

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_{n_{N_0}}) + d(x_{n_{N_0}}, x_m) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq N_0,$$

welches $x = \lim_{m\to\infty} x_m \in M$ bedeutet.

□

In Abschnitt III.3 studierten wir im Detail Eigenschaften stetiger Funktionen welche auf einer kompakten Menge des $\mathbb{R}^n$ definiert waren, wie etwa den Satz über die Annahme eines Maximums (vgl. Satz III.3.9) oder den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit (vgl. III.3.13). Im Folgenden übertragen wir diese Eigenschaften nun auf stetige Funktionen, welche auf einer kompakten Teilmenge eines beliebigen metrischen Raums definiert sind. Wichtige Aussagen der heutigen Analysis beruhen auf diesen Eigenschaften.

3.7 Satz. (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt). *Es seien M und N metrische Räume und $f : M \to N$ eine stetige Funktion. Ist M kompakt, so ist auch $f(M) \subset N$ kompakt.*

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Theorem III.3.7.

3.8 Korollar. *Ist $f : M \to \mathbb{R}$ stetig und M kompakt, so nimmt f ein Minimum bzw. Maximum an.*

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Theorem III.3.9.

3.9 Korollar. *Ist $f : M \to N$ stetig und bijektiv und M kompakt, so ist $f^{-1} : N \to M$ ebenfalls stetig.*

Beweis. Nach Theorem 2.5 genügt es zu zeigen, dass $f(A)$ abgeschlossen ist für alle in M abgeschlossenen Teilmengen $A \subset M$. Nach Beispiel 3.2 c) ist A als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wiederum kompakt. Der obige Satz 3.7 impliziert, dass $f(A)$ ebenfalls kompakt ist; wegen des obigen Korollars 3.4 also inbesondere auch abgeschlossen.

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch gleichmäßig stetige Funktionen auf metrischen Räumen. In Analogie zur Situation von Analysis I, nennen wir eine Funktion $f : M \to N$ zwischen zwei metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N) *gleichmäßig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in M \text{ mit } d_M(x, y) < \delta.$$

Es gilt dann das folgende Resultat.

3.10 Satz. *Es sei $f : M \to N$ eine stetige Funktion zwischen zwei metrischen Räumen M und N. Ist M kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.*

Der Beweis verläuft wiederum wortwörtlich wie in Satz III.3.13.

4 Zusammenhang

Der Zwischenwertsatz aus Analysis I war ein wichtiger Bestandteil im Aufbau der Analysis. Wir verallgemeinern diesen Satz, welchen wir in Abschnitt III.1 für Intervalle formuliert hatten, nun auf stetige Funktionen deren Definitionsbereich eine zusammenhängende Teilmenge eines metrischen Raumes ist.

4.1 Definition. Ein metrischer Raum M heißt *zusammenhängend*, falls keine Zerlegung $M = X \cup Y$ existiert, in der X und Y disjunkt, offen und nicht leer sind.
Eine Menge $X \subset M$ heißt *zusammenhängend*, falls (X, d_X) als metrischer Raum zusammenhängend ist.

4.2 Beispiele. a) $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.
b) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit mindestens zwei Elementen ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist. Für den Beweis verweisen wir auf die Übungen.
c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, denn es gilt

$$\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

d) Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ ist nicht zusammenhängend.

Wir verallgemeinern nun den Satz III.1.11 über stetige Bilder von Intervallen auf zusammenhängende Mengen.

4.3 Satz. *Es sei f eine stetige Abbbildung zwischen zwei metrischen Räumen M und N. Ist M zusammenhängend, so ist auch $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Nehmen wir an die Behauptung sei falsch. Dann gäbe es disjunkte, nicht leere, offene Mengen X und Y mit $f(M) = X \cup Y$ und man erhielte $M = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$, also einen Widerspruch.

□

Der Zwischenwertsatz in metrischen Räumen lautet wie folgt.

4.4 Satz. *Es seien M ein zusammenhängender metrischer Raum, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in M$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Der Beweis ist einfach: falls $f(a) \neq f(b)$ gilt, so ist $f(M)$ nach Beispiel 4.2 b) ein Intervall.

4.5 Beispiel. Wir betrachten die Gruppe

$$O(n, \mathbb{R}) \text{ der orthogonalen } n \times n\text{-Matrizen,}$$

wobei $A \in O(n, \mathbb{R})$ genau dann, wenn $A^{-1} = A^T$ gilt. Dann ist $O(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ nicht zusammenhängend.
In der Tat ist $\det : O(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Polynom in n^2 Variablen, also insbesondere eine stetige Funktion. Ferner gilt $\det diag(1, 1, \ldots, 1) = 1$ und $\det diag(-1, 1, \ldots, 1) = -1$. Wäre $O(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend, so gäbe es nach Satz 4.4 eine Matrix $A \in O(n, \mathbb{R})$ mit $\det A = 0$ im Widerspruch dazu, dass A invertierbar ist.

Ein weiterer Zusammenhangsbegriff ist ebenfalls von Bedeutung.

4.6 Definition. Ein metrischer Raum M heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $a, b \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$ gibt.

Natürliche Beispiele von wegzusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ sind
a) konvexe Mengen,
b) die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, sowie
c) $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Im Folgenden untersuchen wir die Verbindung zwischen zusammenhängenden und wegzusammenhängeden Mengen.

4.7 Satz. *a) Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.*
b) Eine zusammenhängende offene Menge X eines normierten Vektorraums ist wegzusammenhängend.

Den nicht schwierigen Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Wir beenden diesen kurzen Abschnitt mit einem Beispiel, welches für den Orientierungsbegriff von Vektorräumen über $\mathbb{R}$ von großer Bedeutung ist.

4.8 Beispiel. a) Es sei

$$G = GL(n, \mathbb{R}) \text{ die Gruppe der reellen } n \times n\text{-Matrizen } A \text{ mit } \det A \neq 0.$$

Fassen wir G als Teilraum von $\mathbb{R}^{n^2}$ auf, so ist die Gruppe G nicht zusammenhängend. Nehmen wir an, die Behautung wäre falsch, so wäre das Bild der stetigen Abbbildung $\det : G \to \mathbb{R}$ zusammenhängend; tatsächlich gilt aber $\det(G) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Widerspruch!
b) Bedeutend schwieriger zu beweisen ist die Tatsache, dass die Untergruppe

$$GL^+(n, \mathbb{R}) \text{ der reellen } n \times n\text{-Matrizen } A \text{ mit } \det A > 0$$

hingegen zusammenhängend ist.

Der Zusammenhang von metrischen Räumen stellt eine wichtige topologische Invariante dar. Sind M und N homöomorphe Räume, so ist M genau dann zusammenhängend, wenn dies auch für N zutrifft. Hierbei heißen M und N *homöomorph*, falls eine bijektive, stetige Abbildung von M auf N existiert, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Cantor bewies schon im Jahre 1878, dass $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden kann; ferner zeigte Peano im Jahre 1890, dass es eine stetige Surjektion des Intervalls $[0,1]$ auf das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ gibt. Da diese Abbildung nicht bijektiv und Cantor's Konstruktion nicht stetig ist, stellt sich die Frage nach einer homöomorphen Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$. L. Brouwer bewies dann im Jahe 1911, dass es eine solche Abbildung nicht geben kann. Wir beweisen hier nur den Spezialfall $m = 1$.

4.9 Satz. *Es sei $n \geq 2$. Dann ist ist $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.*

Beweis. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ zusammenhängend. Andererseits ist die Menge $\mathbb{R} \backslash \{x\}$ für kein $x \in \mathbb{R}$ nach Beispiel 4.2 b) zusammenhängend.
Gäbe es einen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so gäbe es auch einen solchen zwischen $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\mathbb{R} \backslash \{f(0)\}$ im Widerspruch dazu, dass nach Satz 4.3 stetige Bilder zusammenhänger Mengen wiederum zusammenhängend sind.

$\square$