VI Analysis in metrischen Räumen

Welche Motive veranlassen Mathematiker, Räume von unendlicher Dimension einzuführen, eine Folge reeller Zahlen als einen Punkt in einem Folgenraum und eine Funktion als einen Punkt in einem Funktionenraum anzusehen? Zwei Problemkreise bildeten die treibende Kraft für die Entwicklung dieser Konzepte: zum Einen handelt es sich um Integralgleichungen der Form

$$u(t) + \int_0^1 k(t,s)u(s)ds = f(s), \quad s \in [0,1]$$

mit gegebenem Kern k und rechter Seite f und dem Ziel eine Lösung u zu finden. Zum Anderen sind es Variationsprobleme der Form

$$F(u) = \int_0^1 f(s, u(s), u'(s))ds = \min, \quad u \in X,$$

für eine gegebene Funktion f und eine gegebene Menge X von Funktionen mit dem Ziel eine Funktion $\overline{u} \in X$ zu finden, für welche F ihr Minimum annimmt. DAVID HILBERT (1862-1943) erkannte, dass sich obige Integralgleichungen als lineare Gleichungssysteme im – heute sogenananten – Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 behandeln lassen.
Ein anderer Ansatz zur Lösung obiger Integralgleichungen besteht darin, diese Gleichungen iterativ zu lösen, also als Limes einer als $u_{j+1}(t) = f(s) - \int_0^1 k(t,s)u_j(s)ds$ definierten Folge. Bei den anstehenden Konvergenzbetrachtungen ist es dann ganz natürlich und auch sehr hilfreich, eine Funktion als Element eines Raumes zu verstehen. Diese Vorstellung ist auch bei Variationsproblemen ganz natürlich: hier setzt man bei der Suche nach einem Minimum in F Argumente u ein, mit dem Unterschied, dass, im Gegensatz zu bisher, die Argumente u nun selbst Funktionen sind.
MAURICE FRECHET (1878-1937) führte in seiner Doktorarbeit 1906 den abstrakten Begriff des metrischen Raumes ein, ein Begriff, welcher heute noch von großer Bedeutung ist, da er es erlaubt Konvergenz- und Stetigkeitsbetrachtungen auf einheitliche und anschauliche Art und Weise zu behandeln. Die Konvergenztheorie führt dann auf den Begriff des vollständigen, metrischen Raumes, der auf Fréchet und FELIX HAUSDORFF (1868-1942) zurückgeht.
Eine besonders wichtige Klasse vollständiger, metrischer Räume sind Banachräume. Dieser auf STEFAN BANACH (1892-1945) zurückgehende Begriff ist in der heutigen,

modernen Analysis von enormer Wichtigkeit und fußt auf dem Begriff des normierten Vektorraums. Unter den Banachräumen spielen diejenigen Räume, deren Norm durch ein Skalarprodunkt definiert werden kann, eine wichtige Sonderrolle. Diese werden heute Hilberträume genannt und wurden axiomatisch erstmals von JOHN VON NEUMANN (1903-1957) im Jahre 1929 eingeführt. Sie spielen insbesondere in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle.
Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit den grundlegenden topologischen Grundbegriffen, wie Umgebungen und offenen Mengen in metrischen Räumen. Abschnitt 2 dehnt diese Betrachtungen in natürlicher Weise auf Konvergenz von Folgen und Stetigkeit von Funktionen in metrischen Räumen aus. Hier wird auch der Begriff eines vollständingen metrischen oder normierten Raumes eingeführt. In Abschnitt 3 werden kompakte Mengen via der Überdeckungseigenschaft eingeführt; ferner wird gezeigt dass in metrischen Räumen die Begriffe „überdeckungskompakt“ und „folgenkompakt“ übereinstimmen. Somit lassen sich die grundlegenden Eigenschaften stetiger Funktionen definiert auf kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ problemlos auf metrische Räume übertragen. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein Abschnitt über stetige Funktionen definiert auf zusammenhängenden Mengen. Der Zusammenhang ist nichtzuletzt von Wichtigkeit, da er eine topologische Invariante darstellt.

1 Topologie metrischer Räume

In der Analysis treten neben den bisher untersuchten $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ noch viele weitere Räume mit einer Umgebungs- bzw. Abstandsstruktur auf. Wichtige Klassen in diesem Zusammenhang bilden die normierten und metrischen Räume. In letzteren wird der „Abstand“ zweier Punkte x und y durch die Zahl $d(x,y)$ beschrieben, wobei d eine Metrik ist, ein Abstandsbegriff, welchen wir im Folgenden axiomatisch definieren. Unser Ziel ist es, die schon bekannten topologischen Grundbegriffe des $\mathbb{R}^n$ auf einen metrischen Raum auszudehnen. Hierbei wollen wir bei der Definition der Begriffe „Umgebung“, „offene Menge“, „Konvergenz“ und „Häufungspunkt“ die bekannte Begriffsbildung für den $\mathbb{R}^n$ nachahmen.

Wir beginnen mit der Definition der Metrik und des metrischen Raums.

1.1 Definition. (Metrischer Raum). Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Funktion

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

heißt *Metrik* auf M, falls für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen gelten:

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (M, d) heißt *metrischer Raum*. Die Zahl $d(x, y)$ heißt *Abstand* der Punkte x und y.

Bemerkung. Es gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$, denn es ist

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Im Folgenden erläutern wir die Definition des metrischen Raumes anhand von Beispielen.

1.2 Beispiele. a) Für $x, y \in \mathbb{K}$ definieren wir durch

$$d(x, y) := |x - y|$$

die *Euklidische Metrik.*
b) Ist M eine beliebige Menge, so definiert die Vorschrift

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf M, die sogenannte *diskrete Metrik.*
c) Ist $X \subset M$ und (M, d) ein metrischer Raum, so definiert

$$d_X : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d_X(x, y) := d(x, y),\ x, y \in X,$$

eine Metrik auf X, die sogenannte *induzierte Metrik.*

Eine sehr wichtige Unterklasse der metrischen Räume sind *normierte Räume.* Um diese genauer zu studieren, beginnen wir zunächst mit dem Begriff der Norm auf einem Vektorraum.

1.3 Definition. Es sei V ein Vektoraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt *Norm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen gelten:

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität)

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Vektorraum.*

1.4 Bemerkungen. a) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektoraum, so definiert

$$d(x,y) := \|x-y\|, \quad x,y \in V,$$

eine Metrik auf V. Versehen mit dieser kanonischen Metrik wird also jeder normierte Vektorraum zum metrischen Raum.
b) Die folgenden Eigenschaften der Norm ergeben sich unmitelbar aus der Definition:

i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$.

ii) $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||, \quad x,y \in V$.

1.5 Beispiele. a) Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $n \geq 1$. Definiert man die sogenannte *p-Norm* durch

$$\|x\|_p := \|(x_1,\ldots,x_n)\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} & ,1 \leq p < \infty \\ \max_{1\leq i\leq n} |x_i| & ,p=\infty \end{cases},$$

so ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum.
Die Norm $\|\cdot\|_2$ heißt auch *euklidische Norm*; die Norm $\|\cdot\|_\infty$ wird oft auch *Maximumsnorm* genannt.
Die geometrische Gestalt einer Kugel in einem normierten Raum hängt natürlich von der gewählten Norm ab. Die unten stehenden Abbildungen zeigen die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$, d.h. $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p < 1\}$ bezüglich der p-Normen für $p = 1,2$ und $p = \infty$.

b) Auf dem Vektorraum V der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b]$, d.h. $V = C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$ definiert die Vorschrift

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

eine Norm auf V. Der erste Ausdruck wird als *L^p-Norm* bezeichnet, der zweite als *Supremumsnorm.* Die L^p-Norm spielt eine zentrale Rolle in der harmonischen Analysis.
c) Es sei $c := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent}\}$ der Raum der konvergenten Folgen und $x := (x_n)$. Dann definiert

$$\|x\|_\infty := \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

eine Norm auf c.

Im Folgenden übertragen wir die uns aus dem $\mathbb{R}^n$ schon bekannten topologischen Grundbegriffe wie etwa Umgebungen, offene bzw. abgeschlossene Mengen auf allgemeine metrische Räume (M, d).

1.6 Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann heißt

a) für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ *ε-Umgebung* von x.

b) $U \subset M$ *Umgebung* von x, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset U$.

c) $O \subset M$ *offen*, falls für jedes $x \in O$ ein $\varepsilon_x > 0$ existiert mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subset O$.

d) $A \subset M$ *abgeschlossen*, falls $M \backslash A$ offen ist.

e) $X \subset M$ *beschränkt*, falls ein $x \in M$ und ein $r > 0$ existiert mit $X \subset U_r(x)$.

f) $x \in M$ *Randpunkt* der Menge $X \subset M$, falls jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus X als auch einen Punkt aus $M \backslash X$ enthält. Setzt man

   i) $\partial X := \{x \in M : x \text{ ist Randpunkt von } X\}$, so heißt ∂X der *Rand* von X,

   ii) $\mathring{X} := X \backslash \partial X$, so heißt $\mathring{X}$ das *Innere* von X. Ein Element $x \in \mathring{X}$ heißt *innerer Punkt* von X.

g) $x \in M$ *Häufungspunkt* der Menge $X \subset M$, falls jede Umgebung von x unendlich viele Punkte aus X enthält. Setzt man

$$\overline{X} := \{x \in M : x \in X \text{ oder } x \text{ ist Häufungspunkt von } X\},$$

so heißt $\overline{X}$ der *Abschluß* von X.

Die obigen Begriffsbildungen sind konsistent mit den entsprechenden für $\mathbb{K}^n$, die in Kapitel III.2 in Analysis I getroffen wurden. Dies bedeutet insbesondere, dass sich viele der dortigen Beweise über topologische Gegebenheiten direkt auf metrische Räume übertragen lassen, indem man nur $|x - y|$ durch $d(x, y)$ ersetzt.

1.7 Satz. (Hausdorffsches Trennungsaxiom). *Ist (M, d) ein metrischer Raum und sind $x, y \in M$ mit $x \neq y$, so existieren Umgebungen U_x und U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Beweis. Für $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$ setzen wir $U_x := U_\varepsilon(x)$ und $U_y := U_\varepsilon(y)$. Falls ein $z \in U_x \cap U_y$ existieren würde, so wäre

$$2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Widerspruch.

□

Ganz analog wie in $\mathbb{K}^n$ beweisen wir das folgende Resultat.

1.8 Lemma. *In einem metrischen Raum (M,d) gilt:*
a) Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen sind offen.
b) Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz III.2.6. Wir ersetzen in diesem Fall nur $|x-y|$ durch $d(x,y)$.

1.9 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem normierten Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls zwei Konstanten $c, C > 0$ existieren, derart dass

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \text{für alle } x \in V \tag{1.1}$$

gilt.

Offensichtlich sind die oben betrachteten Normen $\|f\|_1$ und $\|f\|_\infty$ auf $C[0,1]$ nicht äquivalent, denn betrachtet man die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

so gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Andererseits sind die euklidische Norm und die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent, was unmittelbar aus der Abschätzung

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

folgt.
Wir beweisen im Folgenden, dass auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind.

1.10 Theorem. *Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. a) Wir beweisen die Aussage zunächst für $\mathbb{R}^n$ und notieren, dass es genügt zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ist.
Sei also $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und e_j der j-te Einheitsvektor. Dann ist $x = (x_1, \ldots, x_n)^T = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung impliziert

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j e_j\| \le \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \le C\|x\|_2, \tag{1.2}$$

wobei $C := (\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$ gilt.
Um die Abschätzung nach links in der Ungleichung (1.1) zu zeigen, setze

$$c := \inf\{\|x\| : x \in S\},$$

wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ die euklidische Einheitssphäre bezeichnet. Im Folgenden zeigen wir, dass $c > 0$ gilt. Nehmen wir an, dass $c = 0$ ist, so gibt es in S eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus Analysis I (vgl. Kapitel II.2) besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich der euklidischen Norm konvergente Teilfolge, ebenfalls bezeichnet mit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, mit Grenzwert $a \in S$, da $1 = \lim_{k\to\infty}(x_{k1}^2 + \ldots + x_{kn}^2) = a_1^2 + \ldots + a_n^2$.

Andererseits folgt aus (1.2), dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|a\| \le \|a - x_k\| + \|x_k\| \le C\|a - x_k\|_2 + \|x_k\|.$$

Für $k \to \infty$ folgt $\|a\| = 0$, also $a = 0$, im Widerspruch dazu, dass $a \in S$ gilt. Somit ist also $c > 0$.

Für $x \neq 0$ ist $x/\|x\|_2 \in S$; somit gilt $c \le \|x/\|x\|_2\|$ und daher

$$c\|x\|_2 \le \|x\|.$$

Da diese Ungleichung offensichtlich auch für $x = 0$ gilt, folgt die Behauptung für den Fall $\mathbb{R}^n$.

b) Es seien nun V ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|^\sim$ zwei Normen auf V. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf V, und setzt man

$$\|x\|_\phi := \|\phi(x)\| \text{ und } \|x\|_\phi^\sim := \|\phi(x)\|^\sim,$$

so folgt die Behauptung aus Teil a).

□

.

1.11 Bemerkung. Das obige Theorem hat wichtige Konsequenzen. Es besagt insbesondere, dass die oben eingeführten topologischen Grundbegriffe wie Umgebung, offene Menge und Häufungspunkt in einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum nicht von der gewählten Norm abhängen.

2 Konvergenz und Stetigkeit

Im Folgenden übertragen wir die Begriffe der Konvergenz von Folgen und der Stetigkeit von Funktionen von $\mathbb{K}^n$ auf allgemeine metrische Räume (M, d).

2.1 Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum.
a) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ heißt *konvergent* gegen $x \in M$, falls für jede Umgebung U von x ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$x_j \in U, \quad \text{für alle } j \geq N_0.$$

In diesem Fall schreibt man $x = \lim_{j\to\infty} x_j$ und nennt x den *Limes* der Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
b) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ heißt *beschränkt*, falls die Menge $\{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset M$ beschränkt ist.
c) Ein Element $x \in M$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in M, falls jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält.
d) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ heißt *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass ein Häufungspunkt der Menge $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ auch ein Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen wie schon in der Situation von $\mathbb{R}$ nicht.

Die folgenden Aussagen können analog zu den jeweiligen Aussagen aus Analysis I leicht aus den obigen Definitionen hergeleitet werden.

2.2 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a) Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig.

b) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

c) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

d) x ist genau dann Häufungspunkt einer Folge, wenn diese eine gegen x konvergente Teilfolge besitzt.

e) Eine Menge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A$, welche in M konvergiert, gilt $\lim_{j\to\infty} x_j \in A$.

Wir übertragen nun den Begriff der Stetigkeit einer Funktion definiert auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf Abbildungen eines metrischen Raumes in einen anderen.

2.3 Definition. (Stetigkeit). Es seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *stetig in* $x_0 \in M$, falls für jede Umgebung V von $f(x_0) \in N$ eine Umgebung U von x_0 existiert mit $f(U) \subset V$.

Das folgende Theorem charakterisiert stetige Funktionen in Termen der $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit und der Folgenstetigkeit.

2.4 Theorem. (Charakterisierung stetiger Funktionen). *Es sei $f : M \to N$ eine Funktion zwischen zwei metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N). Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) f ist stetig in $x_0 \in M$

b) ($\varepsilon - \delta$-Stetigkeit). Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

c) (Folgenstetigkeit). Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen a) und b) folgt unmittelbar aus der Definition des Begriffs der Umgebung.
Ferner folgt die Äquivalenz der Aussagen b) und c) wie im Beweis von Satz III.1.2 in Analysis I, indem wir $|x - y|$ durch $d_M(x, y)$ und $|f(x) - f(y)|$ durch $d_N(f(x), f(y))$ ersetzen.

□

2.5 Theorem. *Es seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume und $f : M \to N$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) f ist stetig.

ii) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in M für alle in N abgeschlossenen Mengen $A \subset N$.

iii) $f^{-1}(O)$ ist offen in M für alle in N offenen Mengen $O \subset N$.

Der Beweis verläuft wortwörtlich zu demjenigen von Theorem III.2.17, indem wir wiederum $|x-y|$ durch $d_M(x,y)$ und $|f(x)-f(y)|$ durch $d_N(x,y)$ ersetzen.

Wir untersuchen nun speziell die Stetigkeit von linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen. Es seien also V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $T: V \to W$ heißt *lineare Abbildung* oder *linearer Operator*, falls

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$$

gilt. Existiert für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ zwischen zwei normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ eine Konstante $M \geq 0$ mit

$$\|T(x)\|_W \leq C, \quad \text{für alle } x \in V \text{ mit } \|x\|_V \leq 1,$$

so heißt T *beschränkt*. Üblicherweise schreiben wir Tx anstelle von $T(x)$.

2.6 Satz. *Für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ zwischen zwei normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
a) T ist stetig
b) T ist stetig in einem $x_0 \in V$.
c) Es existiert eine Konstante $L > 0$ mit $\|Tx - Ty\|_W \leq L\|x-y\|_V$ für alle $x, y \in V$.
d) T ist beschränkt.

Beweis. Wir zeigen die folgenden Implikationen: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow d) \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$.
Die Aussage $a) \Rightarrow b)$ ist klar.
$b) \Rightarrow d)$: Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|T(x-x_0)\|_W = \|Tx - Tx_0\|_W \leq 1 \text{ für alle } x \in \overline{U_\delta}(x_0) := \{y \in V : \|x_0 - y\| \leq \delta\}$$

Setzt man $h := (x - x_0) \in \overline{U_\delta}(0)$, so ist diese Aussage äquivalent zu $\|Th\|_W \leq 1$ für alle $h \in \overline{U_\delta}(0)$, was wiederum äquivalent zu $\|T(\delta h)\|_W \leq 1$ für alle $h \in \overline{U_1}(0)$ und $\|T(h)\|_W \leq 1/\delta$ für alle $h \in \overline{U_1}(0)$ umformuliert werden kann. Dies bedeutet, dass T beschränkt ist.
$d) \Rightarrow c)$: Es gelte $\|Tx\|_W \leq M$ für alle $x \in \overline{U_1}(0)$. Dann folgt

$$\|T(\frac{x}{\|x\|_V})\|_W \leq M \qquad \text{für alle } x \in V \text{ mit } x \neq 0,$$

also $\|Tx\|_W \leq M\|x\|_V$ für alle $x \in V$ und somit

$$\|Tx - Ty\|_W \leq M\|x-y\|_V \text{ für alle } x, y \in V.$$

Die Aussage $c) \Rightarrow b)$ ist klar; ferner beweisen wir die Aussage $b) \Rightarrow a)$ in den Übungen.
□

2.7 Bemerkung. Im obigen Beweis der Implikation $d) \Rightarrow c)$ haben wir auch bewiesen, dass

$$\|T_x\|_W \leq M \text{ für alle } x \in \overline{U_1}(0) \Leftrightarrow \|Tx\|_W \leq M\|x\|_V \text{ für alle } x \in V$$

gilt. Das Infimum über alle obigen Konstanten M, d.h.

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\|_W \leq M\|x\|_V \text{ für alle } x \in V\}$$

heißt *Operatornorm von* T. Man kann ferner zeigen, dass

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_W : \|x\|_V \leq 1\} \quad \text{und} \\ \|Tx\|_W &\leq \|T\|\|x\|_V, \quad x \in V \end{aligned}$$

gilt. Setzt man ferner

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \to W : T \text{ ist linear und beschränkt}\},$$

so wird $(\mathcal{L}(V, W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

2.8 Beispiel. (Die Zeilensummennorm).Versieht man $\mathbb{K}^n$ mit der Maximumsnorm und betrachtet stetige lineare Abbildungen T auf $\mathbb{K}^n$ in sich, so ist die zugehörige Operatornorm gegeben durch

$$\|T\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

wobei wir T durch die Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ darstellen.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ war für viele Resultate der Analysis I von zentraler Bedeutung. Wir definieren jetzt den Begriff der Vollständigkeit eines metrischen Raumes analog zur Formulierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ via Cauchyfolgen.

2.9 Definition. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in M konvergiert. Ferner wird ein vollständiger, normierter Vektorraum *Banachraum* genannt.

Die obige Definition eines vollständigen, normierten Vektoraums geht auf STEFAN BANACH (1892-1945) zurück, einem polnischen Mathematiker, von welchem grundlegende Beiträge zur Funktionalanalysis stammen. Er sah, dass die meisten in diesem Zusammenhang wichtige Resultate sich in Räumen abspielten, die neben der metrischen Eigenschaft eine Vektorraumstruktur besitzen und dass der Abstand zweier Elemente x und y sich aus der Differenz $x - y$ ableitet.
Der weiter unten folgende Banachsche Fixpunktsatz ist auch heute noch einer der bedeutendstenden Fixpunktsätze.

2.10 Beispiele. a) Der Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ versehen mit der $\|\cdot\|_p$-Norm ist ein Banachraum.
b) Der Funktionenraum $C[a,b]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum für beliebige $-\infty < a < b < \infty$, da jede auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen nach Theorem IV.4.6 eine stetige Grenzfunktion besitzt.
c) Versieht man den Raum $C^1[a,b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen ebenfalls mit der Supremumsnorm, so entsteht ein normierter Raum, der jedoch *kein* Banachraum ist; vgl. die Übungen.
d) Versieht man hingegen $C^1[a,b]$ mit der Norm

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

so ist $(C^1[a,b], \|\cdot\|)$ vollständig, also ein Banachraum. Der Beweis hiervon beruht auf Theorem IV.4.7; vgl. die Übungen.
e) Der *Hilbertsche Folgenraum* ℓ^2 bestehend aus allen quadratsummierbaren Folgen komplexer Zahlen, d.h. aus allen Folgen $a = (a)_{j\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots)$ mit

$$\|a\|_2 := (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2)^{1/2}, \quad a \in \ell^2$$

ist ein vollständiger normierter Vektorraum, also ein Banachraum. Für den Beweis verweisen wir auf die Übungen. Die Vorschrift

$$< a, b >:= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}, \quad a, b \in \ell^2$$

definiert auf ℓ^2 sogar ein Skalarprodukt. Vektorräume versehen mit einem Skalarprodukt heißen *Hilberträume*, falls sie mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollständig sind. Hilberträume spielen in der Quantenmechanik eine massgebliche Rolle; der Begriff des Hilbertraums geht auf DAVID HILBERT (1862-1943) zurück, der erkannte, dass gewisse Integralgleichungen sich in lineare Gleichungssysteme in ℓ^2 übersetzen lassen.

Fixpunktsätze haben vielfältige Anwendungen in der Mathematik. Der folgende Banachsche Fixpunktsatz besagt, dass eine strikte Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum genau einen Fixpunkt besitzt.

2.11 Theorem. (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei (M,d) ein vollständiger, metrischer Raum und $F: M \to M$ eine strikte Kontraktion, d.h. es existiere eine Konstante $q < 1$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \le q\, d(x,y), \quad x, y \in M.$$

Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $r \in M$, d.h. es existiert genau ein $r \in M$ mit $f(r) = r$.
Ferner konvergiert die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := F(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für beliebig gewähltes $x_0 \in M$ gegen r.

Der Beweis verläuft wortwörtlich analog zu Theorem II.2.13 aus Analysis I, indem man $|x - y|$ durch $d(x, y)$ ersetzt.