Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 30.6.2008

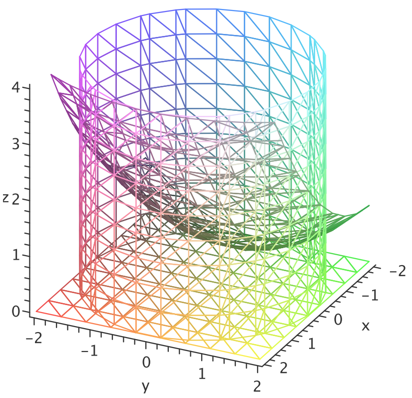
Analysis II für M, LaG/M, Ph

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie das Volumen, das innerhalb des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\}$ oberhalb der Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ und unterhalb des Paraboloids $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2)^2+y^2 = 4z\}$ liegt.



Lösung: Wir verwenden Zylinderkoordinaten, d.h. Polarkoordinaten in den Varibalen x und y unter Beibehaltung der z-Variable. Wir machen also die Variablensubstitution $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = h$. Dann können wir problemlos über den Zylinder integrieren, indem wir r von 0 bis 2 (dem Radius des Zylinders) und φ von 0 bis 2π integrieren. wir müssen uns nur noch die Integrationsgrenzen der Höhe h klar machen. Für jede Wahl von x, y mit $x^2+y^2 \leq 4$ muss von $h = 0$ (untere Grenze) bis zu dem h integriert werden, für das $(x+2)^2+y^2 = 4z$ gilt, d.h. in Zylinder-Koordinaten

$$4h = (r\cos(\varphi)+2)^2+r^2\sin^2(\varphi) = r^2\big(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\big)+4r\cos(\varphi)+4 \iff h = \frac{1}{4}r^2+r\cos(\varphi)+1.$$

Für das Volumen V des gesuchten Körpers K gilt nun mit der Transformationsformel (Transformationsfaktor r aus der Jakobi-Matrix beim Übergang auf Polarkoordinaten nicht vergessen!)

$$\begin{aligned}
V &= \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{4}r^2+r\cos(\varphi)+1} r \,\mathrm{d}h \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{4}r^2+r\cos(\varphi)+1\Big) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{4}r^3 \,\mathrm{d}r + \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2\cos(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r + 2\pi \int_0^2 r \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \frac{1}{16} 2^4 + \big[\frac{1}{3}r^3\big]_0^2 \big[\sin(\varphi)\big]_0^{2\pi} + 2\pi \frac{1}{2} 2^2 = 2\pi + 0 + 4\pi = 6\pi.
\end{aligned}$$

(G 2)

Es sei $K_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ die abgeschlossene Kugel um Null mit Radius R in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Masse dieser Kugel, unter der Annahme, dass sie aus einem Material der konstanten Dichte $\varrho = 1$ besteht.

(b) Bestimmen Sie die Masse der Kugel, wenn die Dichte linear vom Nullpunkt aus zum Rand von 0 auf 1 zunimmt.

(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel aus (b) bei einer Drehung um die z-Achse.

Formeln: Die Masse eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Massendichte $\varrho(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in K$, berechnet sich anhand des Integrals

$$\int_K \varrho(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$$

und das Trägheitsmoment ist gegeben durch

$$\int_K a(\mathrm{x})^2 \varrho(\mathrm{x})\ \mathrm{dx},$$

wobei $a(\mathrm{x})$ der Abstand von x zur Drehachse ist.

LÖSUNG: (a) Die Masse ergibt sich in diesem Fall direkt aus dem Volumen, dass in der Vorlesung zu

$$\int_{K_R} 1\ \mathrm{d}(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

bestimmt wurde (Beispiel XI.3.8 b))

(b) Nun ist das Intgral

$$I := \int_{K_R} \varrho(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z)$$

zu bestimmen. Zur Berechnung verwenden wir die Kugelkoordinaten $x = r\cos(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$ und $z = r\sin(\vartheta)$. Dann gilt mit der in Beispiel XI.3.8 b) bestimmten Determinante

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varrho(r,\varphi,\vartheta) r^2 \cos(\vartheta)\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r$$

Nun ist $\varrho(r,\varphi,\vartheta) = r/R$ und wir erhalten

$$I = \frac{1}{R}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \cos(\vartheta)\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{R}\big[\frac{1}{4}r^4\big]_0^R \big[\sin(\vartheta)\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R^3.$$

(c) Zur Bestimmung des gesuchten Integrals

$$J := \int_{K_R} a(x,y,z)^2 \varrho(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z)$$

überlegen wir uns zunächst, dass für jeden Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ der Abstand $a(x,y,z)$ zur z-Achse $a(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ beträgt. In Kugelkoordinaten bedeutet das

$$\begin{aligned} a(r,\varphi,\vartheta)^2 &= r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\vartheta) + r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ &= r^2\cos^2(\vartheta)\big(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\big) = r^2\cos^2(\vartheta). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$J = \frac{1}{R}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2(\vartheta) \cdot r \cdot r^2 \cos(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{R}\int_0^R r^5\, \mathrm{d}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta$$
$$= \frac{2\pi}{R}\frac{1}{6}R^6\Big[\sin(\vartheta) - \frac{1}{3}\sin^3(\vartheta)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{9}\pi R^5.$$

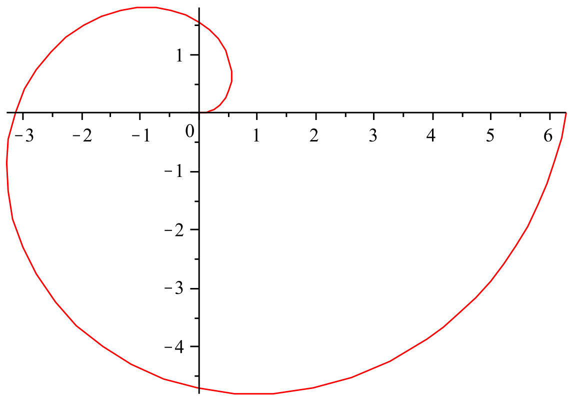
(G 3)

Die *Archimedische Spirale* in $\mathbb{R}^2$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\{(r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0, 2\pi) : r = \varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Skizzieren Sie diese Menge und berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Archimedischen Spirale und der positiven x-Achse eingeschlossen wird.

LÖSUNG: Skizze:



Die Fläche innerhalb der Spirale lässt sich durch

$$F = \{(r,\varphi) \in [0,\infty) \times [0, 2\pi) : r \le \varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

beschreiben. Der Flächeninhalt von F ergibt sich daher durch eine Transformation in Polarkoordinaten zu

$$|F| = \int_F \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{6}\big[\varphi^3\big]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3.$$