Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar über I. Zeigen Sie für alle $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

(a) $\lambda f + \nu g$ ist Riemann-integrierbar, d.h. die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf I ist ein Vektorraum.

(b) $\displaystyle\int_I \big(\lambda f(x) + \nu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + \nu \int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$

(c) Ist $f \geq 0$, so gilt $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(d) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen zunächst, dass λf Riemann-integrierbar ist. Da das für $\lambda = 0$ offensichtlich ist, betrachten wir $\lambda \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der Riemann-Integrierbarkeit von f eine Partition $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ von I mit

$$S_P(f) - s_P(f) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Ist nun $\lambda > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} S_P(\lambda f) - s_P(\lambda f) &= \sum_{j=1}^m \sup_{I_j}(\lambda f)\mu(I_j) - \sum_{j=1}^m \inf_{I_j}(\lambda f)\mu(I_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda \sup_{I_j} f\mu(I_j) - \sum_{j=1}^m \lambda \inf_{I_j} f\mu(I_j) \\ &= \lambda\big(S_P(f) - s_P(f)\big) < \lambda\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\lambda < 0$ müssen wir ein wenig mehr aufpassen und erhalten

$$\begin{aligned} S_P(\lambda f) - s_P(\lambda f) &= \sum_{j=1}^m \sup_{I_j}(\lambda f)\mu(I_j) - \sum_{j=1}^m \inf_{I_j}(\lambda f)\mu(I_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda \inf_{I_j} f\mu(I_j) - \sum_{j=1}^m \lambda \sup_{I_j} f\mu(I_j) \\ &= -\lambda\big(S_P(f) - s_P(f)\big) < -\lambda\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch λf Riemann-integrierbar.

Wir betrachten nun die Summe $f+g$. Sei $P=\{I_1,\dots,I_m\}$ eine Partition von I. Dann gilt für jedes $x\in I_j$

$$f(x)+g(x)\geq \inf_{I_j} f+\inf_{I_j} g, \qquad j=1,\dots,m.$$

Also ist $\inf_{I_j}(f+g)\geq \inf_{I_j} f+\inf_{I_j} g$ für jedes $j=1,\dots,m$. Damit gilt

$$s_P(f)+s_P(g)=\sum_{j=1}^m\bigl(\inf_{I_j} f\;\mu(I_j)+\inf_{I_j} g\;\mu(I_j)\bigr)\leq \sum_{j=1}^m \inf_{I_j}(f+g)\;\mu(I_j)=s_P(f+g),$$

was uns auf

$$s_P(f)+s_P(g)\leq \sup_{\tilde P} s_{\tilde P}(f+g)=\int\limits_{I^*}(f+g)(x)\;\mathrm{d}x \tag{1}$$

für jede beliebige Partition P von I führt.

Bevor wir nun zum Supremum über alle Partitionen P übergehen können, ist folgende Überlegung wichtig: Es gilt

$$\sup_P\bigl(s_P(f)+s_P(g)\bigr)=\sup_P s_P(f)+\sup_P s_P(g)=\int\limits_{I^*} f(x)\;\mathrm{d}x+\int\limits_{I^*} g(x)\;\mathrm{d}x=:C. \tag{2}$$

Um das einzusehen, beobachten wir zunächst, dass wegen

$$s_{\tilde P}(f)+s_{\tilde P}(g)\leq \sup_P s_P(f)+\sup_P s_P(g) \qquad \text{für jede Partition } \tilde P \text{ von } I$$

der Wert C eine obere Schranke ist. Es bleibt nachzuprüfen, dass er die kleinste obere Schranke ist. Dazu wählen wir uns zu gegebenem $\varepsilon>0$ eine Partition P_f und eine Partition P_g von I mit

$$\int\limits_{I^*} f(x)\;\mathrm{d}x-s_{P_f}(f)<\frac{\varepsilon}{2} \quad\text{und}\quad \int\limits_{I^*} g(x)\;\mathrm{d}x-s_{P_g}(g)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist dann P eine gemeinsame Verfeinerung von P_f und P_g, so gilt $s_P(f)\geq s_{P_f}(f)$ und $s_P(g)\geq s_{P_g}(g)$ und damit

$$\begin{aligned} s_P(f)+s_P(g)-C&\geq s_{P_f}(f)-\int\limits_{I^*} f(x)\;\mathrm{d}x+s_{P_g}(g)-\int\limits_{I^*} g(x)\;\mathrm{d}x\\ &>-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=-\varepsilon.\end{aligned}$$

Damit haben wir schließlich

$$s_P(f)+s_P(g)\geq C-\varepsilon.$$

Also haben wir (2) gezeigt und erhalten damit und mit (1)

$$\int\limits_{I^*}(f+g)(x)\;\mathrm{d}x\geq \sup_P\bigl(s_P(f)+s_P(g)\bigr)=\int\limits_{I^*} f(x)\;\mathrm{d}x+\int\limits_{I^*} g(x)\;\mathrm{d}x.$$

Analog zeigt man

$$\int\limits_I^{*}(f+g)(x)\;\mathrm{d}x\leq \inf_P\bigl(S_P(f)+S_P(g)\bigr)=\int\limits_I^{*} f(x)\;\mathrm{d}x+\int\limits_I^{*} g(x)\;\mathrm{d}x.$$

Sind nun f und g Riemann-integrierbar, so gilt damit

$$\begin{aligned}
\int\limits_{I^*} (f+g)(x)\ \mathrm{d}x &\geq \int\limits_{I^*} f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_{I^*} g(x)\ \mathrm{d}x = \int_I f(x)\ \mathrm{d}x + \int_I g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_I^{*} f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_I^{*} g(x)\ \mathrm{d}x \geq \int\limits_I^{*} (f+g)(x)\ \mathrm{d}x \\
&\geq \int\limits_{I^*} (f+g)(x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Also gilt in obiger Ungleichheitskette überall sogar „=“. Insbesondere gilt

$$\int\limits_{I^*} (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_I^{*} (f+g)(x)\ \mathrm{d}x,$$

d.h. $f+g$ ist auf I Riemann-integrierbar.

In Summe haben wir damit auch die Riemann-Integrierbarkeit von $\lambda f + \nu g$ gezeigt.

(b) Wir haben in Teil (a) bereits gesehen, dass λf Riemann-integrierbar ist und für jede Partition P von I

$$S_P(\lambda f) = \begin{cases} \lambda S_P(f), & \text{falls } \lambda \geq 0 \\ \lambda s_P(f), & \text{falls } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

gilt. Damit ist

$$\int_I (\lambda f)(x)\ \mathrm{d}x = \inf_P S_P(\lambda f) = \left\{ \begin{array}{c} \inf_P \lambda S_P(f) = \lambda \inf_P S_P(f) \\ \inf_P \lambda s_p(f) = \lambda \sup_P s_p(f) \end{array} \right\} = \lambda \int_I f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ebenso wissen wir aus dem (a)-Teil, dass $f+g$ Riemann-integrierbar ist und aus der letzten (Un)gleichheitskette in (a) können wir direkt die Beziehung

$$\int_I (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int_I f(x)\ \mathrm{d}x + \int_I g(x)\ \mathrm{d}x$$

folgern.

(c) Ist $f \geq 0$, so gilt für jede Partition $P = \{I_1, \dots, I_m\}$ von I

$$s_P(f) = \sum_{j=1}^{m} \inf_{I_j} f \mu(I_j) \geq \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot \mu(I_j) \geq 0.$$

Also ist

$$\int_I f(x)\ \mathrm{d}x = \sup_P s_P(f) \geq 0.$$

(d) Ist $f \leq g$, so ist $g - f \geq 0$. Nach (b) und (c) gilt also

$$\int_I g(x)\ \mathrm{d}x - \int_I f(x)\ \mathrm{d}x = \int_I (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x \geq 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

(G 2)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } y \geq 0 \text{ und } x \leq y < x+1 \\ -1, & \text{falls } y \geq 0 \text{ und } x+1 \leq y \leq x+2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

wobei alle auftretenden Integrale im Sinne der Analysis I zu verstehen sind.

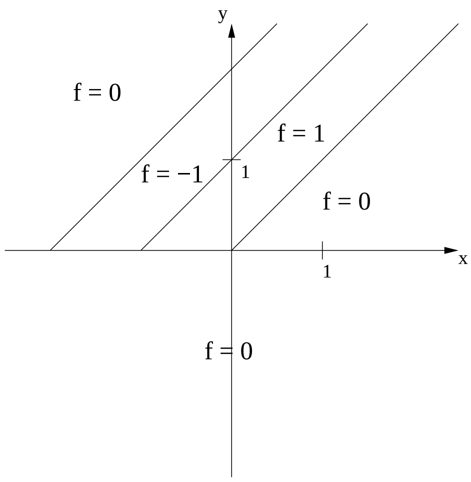
Was fällt Ihnen auf?

LÖSUNG: Aus der Skizze dieser Funktion (s.u.) ersieht man, dass für jedes festgehaltene $y \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}x = 0$$

ist, denn es wird entweder gar nichts aufintegriert (für $y < 0$) oder über eine Intervalllänge von eins jeweils einmal -1 und einmal 1. Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$



Für die umgekehrte Reihenfolge der Integrationsvariablen berechnen wir

$$\text{für festgehaltenes } x \in (-\infty, -2): \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, \mathrm{d}y = 0$$

$$\text{für festgehaltenes } x \in [-2, -1): \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_{0}^{x+2} (-1) \, \mathrm{d}y = -x-2$$

$$\begin{aligned} \text{für festgehaltenes } x \in [-1, 0): \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y &= \int_{0}^{x+1} 1 \, \mathrm{d}y + \int_{x+1}^{x+2} (-1) \, \mathrm{d}y \\ &= x+1-(x+2)+x+1 = x \end{aligned}$$

$$\text{für festgehaltenes } x \in [0, \infty): \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_{x}^{x+1} 1 \, \mathrm{d}y + \int_{x+1}^{x+2} (-1) \, \mathrm{d}y = 1-1 = 0.$$

Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1}(-x-2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1.$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

und man muss offensichtlich im Allgemeinen beim Vertauschen von Integralen aufpassen.

Hausübungen

(H 1)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f, g : A \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar über A. Zeigen Sie für alle $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

(a) $\lambda f + \nu g$ ist Riemann-integrierbar, d.h. die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf A ist ein Vektorraum.

(b) $\int_A \big(\lambda f(x) + \nu g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \nu \int_A g(x)\,\mathrm{d}x.$

(c) Ist $f \geq 0$, so gilt $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(d) Ist $f \leq g$, so gilt $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung: (a) Wir beobachten zunächst, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von f auf A wegen

$$\int\limits_{I(A)^*} f_A(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{A^*} f(x)\,\mathrm{d}x = \overset{*}{\int\limits_{A}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overset{*}{\int\limits_{I(A)}} f_A(x)\,\mathrm{d}x$$

die Riemann-Integrierbarkeit der Funktion f_A auf $I(A)$ folgt. Gleiches gilt natürlich für g.

Seien nun $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit dieser Vorüberlegung und der offensichtlichen Gleichheit $(\lambda f + \nu g)_A = \lambda f_A + \nu g_A$

$$\int\limits_{A^*} (\lambda f + \nu g)(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{I(A)^*} (\lambda f + \nu g)_A(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{I(A)^*} \big(\lambda f_A(x) + \nu g_A(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Da nun nach obiger Vorüberlegung und Aufgabe (G1) (a) die Funktion $\lambda f_A + \nu g_A$ auf $I(A)$ Riemann-integrierbar ist, gilt

$$= \overset{*}{\int\limits_{I(A)}} \big(\lambda f_A(x) + \nu g_A(x)\big)\,\mathrm{d}x = \overset{*}{\int\limits_{I(A)}} (\lambda f + \nu g)_A(x)\,\mathrm{d}x = \overset{*}{\int\limits_{A}} (\lambda f + \nu g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also ist nach Definition XI.2.3 die Funktion $\lambda f + \nu g$ Riemann-integrierbar über A.

(b) Mit obiger Rechnung und Aufgabe (G1) (b) folgt nun sofort

$$\begin{aligned}\int_A (\lambda f + \nu g)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{I(A)} \big(\lambda f_A(x) + \nu g_A(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_{I(A)} f_A(x)\,\mathrm{d}x + \nu \int_{I(A)} g_A(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \nu \int_A g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(c) Wie oben sieht man, dass f_A auf $I(A)$ Riemann-integrierbar ist. Beachtet man nun noch, dass aus $f \geq 0$ auch $f_A \geq 0$ folgt, so bekommen wir mit Hilfe von (G1) (c)

$$\int_A f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{I(A)} f_A(x) \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

(d) Die Argumentation verläuft Wort für Wort wie in (G1) (d).

(H 2)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch das Innere A° und der Abschluss $\overline{A}$ von A messbar sind und dass $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A})$ gilt.

LÖSUNG: Es gilt $\partial A = \partial A^\circ = \partial \overline{A}$. Damit ist $\mu(\partial \overline{A}) = \mu(\partial A^\circ) = \mu(\partial A) = 0$ nach Satz XI.2.12. Da Satz XI.2.12. messbare Mengen charakterisiert, folgt aus diesem Satz die Messbarkeit von A° und $\overline{A}$.

Weiter sind A° und ∂A disjunkt. Es gilt also

$$\mu(\overline{A}) = \mu(A^\circ \cup \partial A) = \mu(A^\circ) + \mu(\partial A) = \mu(A^\circ).$$

Da $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ gilt, haben wir damit auch

$$\mu(\overline{A}) = \mu(A) = \mu(A^\circ).$$

(H 3)

Begründen Sie warum die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie ihren Wert

(a) $\displaystyle\int_{[0,1]^2} (x^2 + xy^3) \, \mathrm{d}(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_D \big(\mathrm{e}^{x+z} \ln(y) w + w x^2 \sin(w)\big) \, \mathrm{d}(x,y,z,w)$, wobei $D := [0,1] \times [1,\mathrm{e}] \times [0,2] \times [0,\pi]$

(c) $\displaystyle\int_K x \, \mathrm{d}(x,y)$, wobei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \text{ und } y \geq 0\}$.

LÖSUNG: (a) Da die integrierte Funktion auf $[0,1]^2$ stetig ist und $[0,1]^2$ ein Intervall ist, existiert das Integral nach Satz XI.1.8 und wir können es nach Bemerkung XI.1.11 c) mit Hilfe von iterierten eindimensionalen Integralen bestimmen.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^2} (x^2 + xy^3) \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 xy^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \int_0^1 y^3 \, \mathrm{d}y = \big[\tfrac{1}{3}x^3\big]_0^1 + \big[\tfrac{1}{2}x^2\big]_0^1 \big[\tfrac{1}{4}y^4\big]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.
\end{aligned}$$

(b) Da die integrierte Funktion auf D stetig ist und D ein Intervall ist, existiert das Integral nach Satz XI.1.8 und wir können es nach Bemerkung XI.1.11 c) mit Hilfe von iterierten eindimensionalen Integralen bestimmen.

$$\begin{aligned}
&\int_D \big(\mathrm{e}^{x+z} \ln(y) w + w x^2 \sin(w)\big) \, \mathrm{d}(x,y,z,w) \\
&= \int_0^1 \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^2 \int_0^\pi \big(\mathrm{e}^{x+z} \ln(y) w + w x^2 \sin(w)\big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}w \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z \int_1^{\mathrm{e}} \ln(y) \, \mathrm{d}y \int_0^\pi w \, \mathrm{d}w + \int_0^\pi w \sin(w) \, \mathrm{d}w \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}y \int_0^2 \mathrm{d}z \\
&= (\mathrm{e}^1 - 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\big[y \ln(y) - y\big]_1^{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{2}\pi^2 + \big[\sin(w) - w\cos(w)\big]_0^\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (\mathrm{e} - 1) \cdot 2 \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\pi^2 + \frac{2}{3}(\mathrm{e} - 1)\pi.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$K = \bigcup_{x\in[0,1]} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Da die Menge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ messbar ist und die Nullfunktion, sowie die Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig sind, ist K damit vertikal einfach. Weiter existiert für jedes $x \in [0,1]$ das Integral

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \,\mathrm{d}y = x\sqrt{1-x^2}.$$

Also existiert das untersuchte Integral nach Satz XI.3.4 und es gilt

$$\int_K x \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$