Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Untersuchen Sie für $n \geq 2$, ob nachstehende Folgen Dirac-Folgen auf $I \subseteq \mathbb{R}$ sind:

$$\begin{array}{lll} c_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{n^2x^2+1} & \text{auf} & I = \mathbb{R}; \\ D_n, F_n & \text{auf} & I = [-\pi, \pi], \end{array}$$

wobei D_n bzw. F_n der Dirichlet- bzw. Fejerkern n-ten Grades, definiert wie in der Vorlesung (27.1 d)), seien.
(**Hinweis:** Hierbei dürfen die Darstellungen Aufgabe (H 1) verwendet werden.)

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und supp$f$ kompakt. Wir setzen $M := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und $f_n(x) := \dfrac{n}{M} f(xn)$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge ist.

Lösung: (a)

1. Es giltoffensichtlich $c_n(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} c_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{(nx)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\arctan z\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} c_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \frac{n}{(nx)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-n\delta} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{\pi}\int_{n\delta}^{\infty} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(-n\delta) + \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(n\delta)\Big) \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Also gibt es für jedes $\delta > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} c_n(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

für alle $n > N$ gilt. Damit ist (c_n) eine Dirac-Folge.

2. Für $n = 3$ und $x = \pi$ gilt $D_3(\pi) = \frac{\sin(7\pi/2)}{(\sin(\pi/2))} = -1 < 0$ und daher ist (D_n) keine Dirac-Folge.

3. Wir verwenden die Darstellung aus Aufgabe (H 1). Für F_n gilt

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin((nx)/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geq 0.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} F_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-\delta}\left(\frac{\sin((nx)/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\sin((nx)/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{1}{\sin^2(x/2)}\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\sin^2(x/2)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{\pi-\delta}{\sin^2(-\delta/2)} + \frac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)}\right) \\
&\leq \frac{1}{n}2\frac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)} \\
&\to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Für die Berechnung des Integrals benutzen wir die Definition aus der Vorlesung:

$$\int_{[-\pi,\pi]} F_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{[-\pi,\pi]}\sum_{j=0}^{n-1} D_j(x)\,\mathrm{d}x$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]} D_j(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{[-\pi,\pi]}\sum_{k=-j}^{j} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=-j}^{j}\int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$\int_{[-\pi,\pi]} F_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{[-\pi,\pi]} 2\pi = 2\pi,$$

also ist $(\frac{1}{2\pi}F_n)$ eine Dirac-Folge.

(b) Nach Vor. gilt $f_n(x) = \frac{n}{M}f(xn) \geq 0$.
Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}\frac{n}{M}f(xn)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{z=xn}{=} \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{M}f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es seien ε, $\delta > 0$. Wähle n_0 so groß, dass $f(xn_0) = 0$ in $\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]$. Dies ist möglich, da supp f kompakt, also insbesondere beschränkt, ist. Damit gilt

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}\frac{n}{M}f(xn)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Damit ist (f_n) eine Dirac-Folge.

(G 2)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

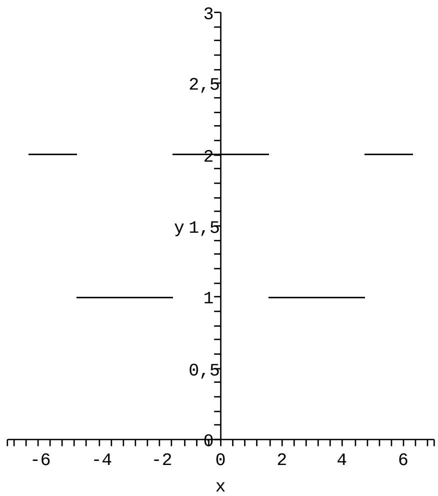
$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } |x| \le \pi/2, \\ 1, & \text{für } \pi/2 < |x| \le \pi. \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und bestimmen Sie die Fourierreihe von f.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe von f und was ist die Grenzfunktion?
3. Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+1)}.$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

LÖSUNG: 1.



Da f gerade ist, gilt $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) f(x) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) \ \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi n} \sin(nx) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi n} \sin(nx) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n} \sin(\frac{n\pi}{2}) - 0 + 0 - \frac{2}{\pi n} \sin(n\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi n} \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\dfrac{2}{\pi n}, & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = 2 + 1 = 3.$$

Damit ist die Fourierreihe von f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x).$$

2. f ist stückweise glatt mit Sprungstellen in $\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Also konvergiert die Fourierreihe von f gegen $f(x)$ für $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, und gegen $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ für $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

   Die Grenzfunktion ist also $\begin{cases} f(x), & x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \\ \dfrac{3}{2}, & x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}. \end{cases}$

3. In $x_0 = 0$ ist f stetig, also gilt nach (b)

$$\begin{aligned} 2 = f(0) &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) \quad \text{nach Hinweis.} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3-4k-1}{(4k+1)(4k+3)} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+1)}. \end{aligned}$$

   Damit ist
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+1)} = \left(2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

(G 3)

Wir betrachten die 2π-periodische Funktion f, gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - t), & 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

LÖSUNG: Wir berechnen die komplexe Darstellung der Fourierreihe:
Es ist klar, dass $c_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\pi - t)\,\mathrm{d}t = 0$ gilt. Für $n \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - t) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} -t\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{in} t\mathrm{e}^{-int}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{in} \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{2in} \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe gegeben durch

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{1}{2in}\mathrm{e}^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nt).$$

Aus der Parseval-Gleichung folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi-t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{24\pi}(\pi-t)^3\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich die Behauptung.

Hausübungen

(H 1)

Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung: Für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi\mathbb{Z}\}$ gilt

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, \\
F_n(x) &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.
\end{aligned}$$

Lösung: Wir führen eine Induktion nach n.

$n=0$: $\quad D_0(x) = \mathrm{e}^{i0x} = 1 = \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/2)}$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
D_{n+1}(x) &= \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} \mathrm{e}^{ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{i(n+1)x} + \mathrm{e}^{-i(n+1)x} \\
&\overset{IV}{=} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} + \frac{2\cos((n+1)x)\sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{\sin((n+1)x)\cos(x/2) - \cos((n+1)x)\sin(x/2) + 2\cos((n+1)x)\sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{\sin((n+1)x)\cos(x/2) + \cos((n+1)x)\sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{\sin(((n+1)+1/2)x)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

Die Formel für F_n erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{n\sin(x/2)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((k+1/2)x) \\
&= \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i(k+1/2)x}\right) \\
&= \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ix/2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikx}\right).
\end{aligned}$$

Für die Summe auf der rechten Seite erhält man mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikx} = \frac{1-\mathrm{e}^{inx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}.$$

Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
1-\mathrm{e}^{ikx} &= 1 - i\sin(kx) - \cos(kx) \\
&= \sin^2(kx/2)\cos^2(kx/2) - 2i\sin(kx/2)\cos(kx/2) - \cos^2(kx/2) + \sin^2(kx/2) \\
&= 2\sin^2(kx/2) - 2i\sin(kx/2)\cos(kx/2) \\
&= -2i\sin(kx/2)\mathrm{e}^{ikx/2}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikx} &= \frac{-2i\sin(nx/2)\mathrm{e}^{inx/2}}{-2i\sin(x/2)\mathrm{e}^{ix/2}} \\
&= \mathrm{e}^{-ix/2}\mathrm{e}^{inx/2}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{ix/2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikx}\right) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{inx/2}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right) \\
&= \frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

und daher

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{\sin(x/2)}\frac{\sin(nx/2)^2}{\sin(x/2)}.$$

(H 2)

Wir wollen den folgenden Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen beweisen. Beachten Sie, dass die Voraussetzungen deutlich stärker sind als nötig, sie erlauben jedoch einen relativ einfachen Beweis.

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und 2-mal stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

wobei a_n und b_n durch (9.12) gegeben sind, gleichmäßig gegen f.

Hinweis: Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f'' und integrieren Sie partiell.

LÖSUNG: Wir schreiben $a_n(f), b_n(f)$ bzw. $a_n(f''), b_n(f'')$ für die Fourierkoeffizienten von f bzw. f''. Es gilt

$$|a_n(f'')| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f''(x)|dx =: c \quad \text{und} \quad |b_n(f'')| \leq c$$

wobei c unabhängig von n ist. Ausserdem hat man

$$\begin{aligned}
|a_n(f'')| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|-\int_0^{2\pi} f'(x)(-1)n\sin(nx)dx\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(x)(-1)n^2\cos(nx)dx\right| \\
&= n^2|a_n(f)|,
\end{aligned}$$

wobei die Randterme verschwinden, weil die Funktionen periodisch sind. Also gilt insbesondere

$$|a_n(f)| = \frac{1}{n^2}|a_n(f'')| \leq \frac{c}{n^2}.$$

Analog beweist man $|b_n| \leq \frac{c}{n^2}$. Das bedeutet

$$|\frac{a_0}{2}| + \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \cos nx + b_n \sin nx\|_\infty \leq |\frac{a_0}{2}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{n^2}.$$

Also ist die Reihe absolut konvergent, also gleichmäßig konvergent. Nach Vorlesung (Satz Nr.??) stimmt f mit ihrer Fourierreihe überein, also konvergiert $S_\infty(f)$ gleichmäßig gegen f.

(H 3)

Betrachten Sie die 2π-periodische Funktion g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases} .$$

(a) Skizzieren Sie g, und geben Sie die Fourier-Reihe von g an.

(b) Ermitteln Sie damit den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

LÖSUNG: 1. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von f. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(0x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi n}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi/2)-1)
\end{aligned}$$

Da

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1 \end{cases}$$

ergibt sich die Fourierreihe

$$S_\infty(f) = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)}\cos((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\pi}(\cos(k\pi/2)-1)\sin(kx).$$

Für $x = 0$ folgt also, da $S_\infty(f)(0) = \frac{1}{2}(f(0^+)+f(0^-))$

$$\frac{1}{2} = S_\infty(f)(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

also folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$