Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 9.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

10. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Wir definieren folgende Wege im $\mathbb{R}^2$:
Sei γ_1 der Halbkreis von $(0,1)$ durch $(1,0)$ nach $(0,-1)$. γ_2 sei der Strahl von $(0,-1)$ nach $(-\infty,-\infty)$, der mit der y-Achse ebenfalls einen Winkel von $45°$ bildet.

a) Skizzieren Sie den Weg $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ und geben Sie eine Parametrisierung von γ an.

b) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Kurvenintegral $\int_\gamma e^{\alpha x} dx$, wobei $e^{\alpha x} := (e^{\alpha x_1}, e^{\alpha x_2})$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

LÖSUNG: 1. Eine Parameterdarstellung von γ ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin(t\pi) \\ \cos(t\pi) \end{pmatrix}, & t \in [0,1] \\ \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}, & t \in (1,\infty) \end{cases}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{\alpha\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\alpha\sin(t\pi)}, \mathrm{e}^{-\alpha\cos(t\pi)}\right)\cdot\pi\left(\cos(\pi t), -\sin(\pi t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \left(\mathrm{e}^{\alpha(1-t)}, \mathrm{e}^{\alpha(-t)}\right)\cdot(-1,-1)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\alpha\sin(t\pi)}\cos(\pi t) - \mathrm{e}^{-\alpha\cos(t\pi)}\sin(\pi t)\right)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\sin(t\pi)}\Big|_0^1 + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\cos(t\pi)}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha})\end{aligned}$$

und für das zweite gilt

$$\begin{aligned}\int_1^R \left(-\mathrm{e}^{\alpha(1-t)} - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha(1-t)}\Big|_1^R + \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big|_1^R \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(1-R)} - 1\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha R} - 1\right) \\ &\to -\frac{2}{\alpha} \qquad (R\to\infty).\end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt $\int_\gamma \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha} - \mathrm{e}^{\alpha} - 2)$.

(G 2)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

Ist $\int_\gamma F(x)dx$ wegunabhängig, dann ist F ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\varphi$.

Lösung: Es sei $\xi, x \in \Omega$ fest gewählt und γ ein Weg, der ξ mit x verbindet. Wir definieren die Funktion

$$V(x) = \int_\gamma F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen der Wegunabhängigkeit ist diese Funktion wohldefiniert. Zur Bestimmung der Ableitung hängen wir an γ einen geradlinigen Weg γ_1, der den Punkt x mit $x+h$ verbindet, also $\gamma_1(t) = x+th$, $t \in [0,1]$. Es gilt dann

$$V(x+h) - V(x) = \int_{\gamma_1} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x+th)\cdot h\,\mathrm{d}t.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\tau \in (0,1)$, so dass

$$\int_0^1 F(x+th)\cdot h\,\mathrm{d}t = F(x+\tau h)\cdot h$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von F und der Abschätzung $|F(x+\tau h)\cdot h - F(x)\cdot h| \leq \|F(x+\tau h) - F(x)\|\cdot\|h\|$ folgt, dass $V(x+h) - V(x) = F(x)\cdot h + \varepsilon(h)\|h\|$, wobei $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Damit gilt aber $\nabla V = F$.

(G 3)

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei stetig differenzierbare Kurven. Die Kurven heißen äquivalent, falls es eine monoton wachsende, stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\varphi : J \to I$ gibt, so dass $\gamma(\varphi(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in J$ gilt. $\tilde{\gamma}$ heißt auch Umparametrisierung von γ.

Zeigen Sie, dass sich jede stetig differenzierbare Kurve nach der Weglänge parametrisieren lässt, d.h. zu jeder Kurve γ gibt es eine Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$, so dass $|\tilde{\gamma}'| = 1$ gilt.

Lösung: Wir suchen eine Parametertransformation $\varphi(t)$, so dass $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t))$ mit $|\tilde{\gamma}'| = 1$. Mit der Kettenregel folgt, dass dann die Gleichung $|\gamma'(\varphi(t))|\varphi'(t) = 1$ wegen $\varphi' > 0$ gelten muss. Daher muss die Umkehrfunktion ψ von φ die Bedingung $\psi'(s) = |\gamma'(s)|$ erfüllen. Das heißt, es gilt

$$t = \psi(s) = \int_a^s |\gamma'(r)|\,\mathrm{d}r$$

dies ist eine zulässige Umparametrisierung. Weiter erkennt man, dass durch ψ gerade die Kurvenlänge gegeben ist.

Hausübungen

(H 1)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

(a) $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ längs der Kurve, die von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ auf der Parabel $y = x^2$ verläuft.

(b) $\int_\gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$ längs des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, bei einem vollen Umlauf in positivem Sinn.

LÖSUNG: 1. Eine Parametrisierung der Kurve ist gegeben durch $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$. Dann gilt $\gamma'(t) = (1, 2t)^T$ und

$$\begin{aligned}\int_\gamma \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1} t + t^2 + 2t(t-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= (\frac{1}{2}t^2 + t^3 - \frac{1}{2}t^4)\Big|_{-1}^{1} \\ &= 2\end{aligned}$$

2. Wir parametrisieren die Kurve in drei Teilabschnitte, jeweils auf dem Intervall $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \\ \int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \\ \int_{\gamma_3} \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 -((1-t)^2+t^2) + (1-t)^2 - t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -2t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

also ergibt sich insgesamt

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) = 0$$

(H 2)

Es seien $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\text{rot } (h \cdot F) = h \cdot \text{rot } F - F \times \nabla h$;

(b) $\text{rot } (\text{rot } F) = \nabla(\text{div } F) - \Delta F$.

LÖSUNG: 1. Es gilt $\partial_i(hF_j) = (\partial_j h)F_j + h(\partial_i F_j)$, damit folgt

$$\begin{aligned}\text{rot } (hF) &= \begin{pmatrix} \partial_2(hF_3) - \partial_3(hF_2) \\ \partial_3(hF_1) - \partial_1(hF_3) \\ \partial_1(hF_2) - \partial_2(hF_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_2 h)F_3 + h(\partial_2 F_3) - (\partial_3 h)F_2 + h(\partial_3 F_2) \\ (\partial_3 h)F_1 + h(\partial_3 F_1) - (\partial_1 h)F_3 + h(\partial_1 F_3) \\ (\partial_1 h)F_3 + h(\partial_1 F_3) - (\partial_3 h)F_1 + h(\partial_3 F_1) \end{pmatrix} \\ &= h \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\partial_2 h)F_3 - (\partial_3 h)F_2 \\ (\partial_3 h)F_1 - (\partial_1 h)F_3 \\ (\partial_1 h)F_3 - (\partial_3 h)F_1 \end{pmatrix} \\ &= h \cdot \text{rot } F - F \times \nabla h\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } F &= \text{rot} \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) - \partial_3(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) \\ \partial_3(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) - \partial_1(\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \\ \partial_1(\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) - \partial_2(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) \end{pmatrix} \\
&= \nabla(\text{div } F) - \Delta F
\end{aligned}$$

(H 3)

Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Genauer: Ist $f \circ \gamma$ stetig und $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ, so gilt

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG: Es seien γ_1 und γ_2 äquivalente Kurven. Das heißt, es gibt eine monoton wachsende Funktion φ, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ gilt. Nach der Kettenregel folgt dann $\gamma_2'(t) = \gamma_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ und damit gilt mit einer Anwendung der Substitutionsregel ($s = \varphi(t)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_s(t)) \cdot \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_1} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$