Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 2.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $p, q \in (1, \infty)$ fest gewählt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie das Minimum von

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := xy = 1.$$

Folgern Sie hieraus auch $\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv$.

LÖSUNG: Wir verwenden die Lagrange Multiplikatorenregel. Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q + \lambda(xy - 1).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x, y, \lambda) &= x^{p-1} + \lambda y \\ \partial_2 L(x, y, \lambda) &= y^{q-1} + \lambda x \\ \partial_3 L(x, y, \lambda) &= xy - 1 \end{aligned}$$

außerdem ist, wegen $\nabla g(x, y) - 1 = (y, x) \neq 0$ für (x, y) mit $g(x, y) - 1 = 0$, Null ein regulärer Wert von g. Ist (x, y) ein Extremwert, so hat man

$$\lambda y = x^{p-1}, \quad \lambda x = y^{q-1}, \quad xy = 1 \;\Rightarrow\; x, y \neq 0.$$

Durch Auflösen erhält man leicht $x = y = 1$. Also ist $(1, 1)$ der einzige kritische Punkt. Weiterhin gilt, falls $x \to \infty$, dass $f(x, y) \to \infty$ und für $x \to 0$ folgt aus $xy = 1$, dass $y \to \infty$ also $f(x, y) \to \infty$. Analog für y. Also liegt in $(1, 1)$ ein Minimum vor.

Sei nun

$$x := \frac{u}{(uv)^{\frac{1}{p}}}, \quad y := \frac{v}{(uv)^{\frac{1}{q}}}.$$

Dann gilt $xy = 1$ und wie eben berechnet $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \geq 1$. Umformen liefert $\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \geq uv$.

(G 2)

Berechnen Sie die Kurvenlänge der folgenden Kurven

(a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(b) $g : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

LÖSUNG: (a): Es gilt

$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)$ und $\|f'(t)\|^2 = r^2 + c^2$. Also folgt

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

(b): Es gilt

$g'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ und $\|g'(t)\|^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$. Damit gilt

$$L(g) = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\sinh 1.$$

(G 3)

Es seien $a, b > 0$ und

$$M_{a,b} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

LÖSUNG: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ und zeigen, dass 1 ein regulärer Wert von f ist. Es gilt

$$Df(x,y,z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, 0)$$

und damit folgt, dass $Df = 0$ falls $x = y = 0$. Da jedoch keiner der Punkte $(0,0,z)$ für $z \in \mathbb{R}$ auf $M_{a,b} = f^{-1}(1)$ liegt, ist 1 ein regulärer Wert von f. Mit dem Satz vom regulären Wert folgt nun die Behauptung.

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

LÖSUNG: Ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt 0 lässt sich eindeutig durch die Angabe einer Ecke (x,y,z) beschreiben. Offensichtlich hat ein achsenparalleler Quader mit maximalem Volumen im Ellipsoid seien Mittelpunkt in 0 und seine Ecken auf dem Rand des Ellipsoids, d.h. für die Ecken (x,y,z) gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Wir betrachten die Ecke des Quaders mit $x, y, z \geq 0$. Das Volumen ist $V(x,y,z) = 8xyz$. Die Nebenbedingung ist $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \nabla V(x,y,z) &= (8yz, 8xz, 8xy)^T \\ \nabla f(x,y,z) &= (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq 0 \quad \text{für alle Punkte auf dem Ellipsoid.} \end{aligned}$$

Aus der Langrange'schen Multiplikatorenregel folgt

$(i)\ 8y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}$

$(ii)\ 8x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{a^2}$

$(iii)\ 8x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{a^2}$

Die drei Gleichungen ergeben

$$8x_0y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

also

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Aus $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ (die NB!) folgt somit $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, also ist die Lösung

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c$$

Da die Funktion $V(x,y,z)$ stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $A := \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Ist $x = 0, y = 0$ oder $z = 0$, so ist $V(x,y,z) = 0$.

(H 2)

Betrachten Sie die Kurve

$$X:\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ X(t) = (t^2, t^3).$$

(a) Skizzieren Sie die Bahn der Kurve.

(b) In welchen Punkten $X(t)$ gilt $X'(t) \neq (0,\ 0)$?

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve X.

Lösung: (b) $X'(t) = (2t,\ 3t^2)$.
In allen Punkten außer dem Nullpunkt gilt $X'(t) \neq (0,0)$.
(c)

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{1} \|X'(t)\|\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} |t| \sqrt{4 + (3t)^2}\, dt \\
&= 2\int_{0}^{1} t\sqrt{4 + (3t)^2}\, dt \\
&= 6\int_{0}^{1} t\sqrt{(2/3)^2 + t^2}\, dt \\
&= 2\sqrt{((2/3)^2 + t^2)^3}\Big|_{t=0}^{1} \\
&= 2\sqrt{((4/9)+1)^3} - 2\sqrt{(4/9)^3} \\
&= 2\sqrt{(13/9)^3} - 2(2/3)^3 \\
&= (26/27)\sqrt{13} - 16/27.
\end{aligned}$$

(H 3)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$. Zeigen Sie, dass $M = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_0M.

LÖSUNG: Es gilt

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 & -1 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt, dass Rang $Df \geq 1$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Da aus $t(x-y) = 1$ und $t(3x-2) = 3$ mit $t \neq 0$ folgt, dass $x = \frac{1+t}{t}$ und damit $t(3x-2) = 3 + t = 3$ gilt. Also gibt es kein $t \neq 0$ so dass

$$t \begin{pmatrix} x-1 \\ 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und daher hat Df auf M stets den Rang 2 ist also Surjektiv. Mit dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

0 ist ein regulärer Wert von f. Daher ist mit Satz 3.8 der Vorlesung der Tangentialraum gegeben durch

$$T_0M = \text{kern } Df(0) = \text{kern } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{kern } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$