Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 26.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ye^x + xe^y = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ eindeutig eine Funktion $h(x) = y(x)$ definiert, die die Gleichung nach y auflöst. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von h im Punkt $x = 0$.

LÖSUNG: Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen VIII.2.1 mit $k = m = 1$, $f(x,y) = ye^x + xe^y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und $a = b = 0$. Dann ist $f(a,b) = f(0,0) = 0$, f ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\partial_2 f(x,y) = e^x + xe^y, \quad \text{d.h. } \partial_2 f(0,0) = 1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es damit eine Umgebung W von $a = 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $h : W \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = 0$ und $f(x,h(x)) = 0$, d.h. h löst die Gleichung lokal um $(0,0)$ nach y auf.

Zur Bestimmung der Ableitungen von h differenzieren wir die Gleichung

$$0 = f(x,h(x)) = h(x)e^x + xe^{h(x)},$$

die in einer Umgebung von 0 gilt, nach x. Das ergibt:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,h(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(h(x)e^x + xe^{h(x)}\big) = h'(x)e^x + h(x)e^x + e^{h(x)} + xh'(x)e^{h(x)} \tag{1}$$

und speziell für $x = 0$:

$$0 = h'(0) \cdot 1 + h(0) \cdot 1 + e^{h(0)} + 0 = h'(0) + 0 + e^0 \iff h'(0) = -1.$$

Differenzieren wir in (1) noch mal nach x so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x,h(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(h'(x)e^x + h(x)e^x + e^{h(x)} + xh'(x)e^{h(x)}\big) \\ &= h''(x)e^x + h'(x)e^x + h'(x)e^x + h(x)e^x + e^{h(x)}h'(x) + h'(x)e^{h(x)} + xh''(x)e^{h(x)} + x(h'(x))^2 e^{h(x)} \end{aligned}$$

und wieder speziell für $x = 0$ mit dem Ergebnis von der ersten Ableitung:

$$0 = h''(0) + 2h'(0) + h(0) + 2e^0 h'(0) + 0 + 0 = h''(0) - 2 + 0 - 2 \iff h''(0) = 4.$$

(G 2)

Es sei $A : (0,1) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter habe für jedes $t \in (0,1)$ die Matrix $A(t)$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1(t) < \lambda_2(t)$. Zeigen Sie

(a) durch explizite Berechnung der Eigenwerte,

(b) durch Verwendung des Satzes über implizite Funktionen,

dass die Abbildungen $\lambda_1, \lambda_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass λ_1 und λ_2 stetig sind.

LÖSUNG: (a) Zur Berechnung der Eigenwerte betrachten wir

$$\det(\lambda - A(t)) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a(t) & b(t) \\ b(t) & \lambda - d(t) \end{pmatrix} = \lambda^2 - \big(a(t) + d(t)\big)\lambda + a(t)d(t) - b(t)^2.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann Null, wenn

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1(t) &= \frac{a(t)+d(t)}{2} - \sqrt{\frac{(a(t)+d(t))^2}{4} + b(t)^2 - a(t)d(t)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(a(t) + d(t) - \sqrt{(a(t)-d(t))^2 + 4b(t)^2}\Big) \end{aligned}$$

oder

$$\lambda = \lambda_2(t) = \frac{1}{2}\Big(a(t) + d(t) + \sqrt{(a(t)-d(t))^2 + 4b(t)^2}\Big)$$

ist. Der Ausdruck unter der Wurzel ist immer ≥ 0, was bei einer symmetrischen Matrix ja auch so sein sollte, aber er ist nach Voraussetzung sogar immer > 0, denn sonst wäre $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$. Damit sind die expliziten Ausdrücke für λ_1 und λ_2 offensichtlich nach t stetig differenzierbar.

(b) Zur Anwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen definieren wir die Funktion $F : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t,\lambda) := \det\big(\lambda - A(t)\big),$$

d.h. $F(t,\cdot)$ ist das charakteristische Polynom von $A(t)$.

Nach unserer Berechnung in (a) gilt dann

$$F(t,\lambda) = \lambda^2 - \big(a(t) + d(t)\big)\lambda + a(t)d(t) - b(t)^2$$

und F ist stetig differenzierbar.

Sei nun $(t_0, \lambda_0) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ ein Punkt mit $F(t_0, \lambda_0) = 0$, d.h. λ_0 ist Eigenwert von $A(t_0)$. Wir nehmen an, es wäre $\partial_2 F(t_0, \lambda_0) = 0$. Dann gilt wegen

$$\partial_2 F(t,\lambda) = 2\lambda - a(t) - d(t)$$

sofort $2\lambda_0 = a(t_0) + d(t_0)$ und damit

$$0 = F(t_0,\lambda_0) = \lambda_0^2 - 2\lambda_0^2 + a(t_0)d(t_0) - b(t_0)^2 \iff \lambda_0^2 = a(t_0)d(t_0) - b(t_0)^2$$

Für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$F(t_0,\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2 = (\lambda - \lambda_0)^2,$$

d.h. λ_0 ist doppelter Eigenwert von $A(t_0)$ und das war ja gerade ausgeschlossen.

Also muss $\partial_2 F(t_0, \lambda_0) \neq 0$ sein und der Satz über implizit definierte Funktionen liefert uns ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $\lambda : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(t_0) = \lambda_0$ und

$$F(t, \lambda(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon),$$

d.h. für jedes $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ist $\lambda(t)$ ein Eigenwert von $A(t)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$ auf dem ganzen Intervall $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt. Dazu nehmen wir an, es wäre $\lambda(s_1) = \lambda_1(s_1)$ und $\lambda(s_2) = \lambda_2(s_2)$ für s_1, s_2 aus diesem Intervall und betrachten die Funktion $g : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $g(s) = 2\lambda(s) - \lambda_1(s) - \lambda_2(s)$. Dann ist g (unter Verwendung des Hinweises) stetig und es gilt nach der Definition von λ_1 und λ_2

$$g(s_1) = 2\lambda(s_1) - \lambda_1(s_1) - \lambda_2(s_1) = \lambda_1(s_1) - \lambda_2(s_1) < 0$$

und

$$g(s_2) = 2\lambda(s_2) - \lambda_1(s_2) - \lambda_2(s_2) = \lambda_2(s_2) - \lambda_1(s_2) > 0.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein s^* zwischen s_1 und s_2 mit $g(s^*) = 0$ und damit

$$\lambda(s^*) = \frac{\lambda_1(s^*) + \lambda_2(s^*)}{2}$$

Da aber $\lambda(s^*)$ immer noch ein Eigenwert von $A(s^*)$ sein muss, muss dann $\lambda(s^*) = \lambda_1(s^*)$ oder $\lambda(s^*) = \lambda_2(s^*)$ gelten. In beiden Fällen bekommen wir den Widerspruch $\lambda(s^*) = \lambda_1(s^*) = \lambda_2(s^*)$.

(G 3)

(a) Es sei $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit $\gamma(t) = (t^3, t^6)^T$, $t \in [-1, 1]$. Zeigen Sie dass $\gamma((-1, 1))$ eine eindimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $M := \{x_1, \ldots, x_k\}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist und bestimmen Sie deren Dimension.

Lösung: (a) Es sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\tau) = \tau^2$. Dann ist $(-1, 1)$ eine offene Menge und f stetig differenzierbar. Also ist nach Satz VIII.3.2 die Menge $\operatorname{graph}(f)$ eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$. Wir zeigen noch, dass $\gamma((-1, 1)) = \operatorname{graph}(f) = \{(\tau, f(\tau)) \in \mathbb{R}^2 : \tau \in (-1, 1)\}$ ist.

Sei dazu $x \in \gamma((-1, 1))$. Dann gibt es ein $t \in (-1, 1)$, so dass $x = (t^3, t^6)$ ist. Sei $\tau := t^3$. Dann gilt wieder $\tau \in (-1, 1)$ und $f(\tau) = \tau^2 = t^6$, d.h. wir haben $x = (\tau, f(\tau))$ mit $\tau \in (-1, 1)$ und $x \in \operatorname{graph}(f)$.

Sei nun $x \in \operatorname{graph}(f)$. Dann ist $x_2 = f(x_1) = x_1^2$ und $x_1 \in (-1, 1)$. Setze $t := \sqrt[3]{x_1}$. Dann gilt $t \in (-1, 1)$ und $\gamma(t) = (t^3, t^6) = (x_1, x_1^2) = (x_1, x_2) = x$. Also ist $x \in \gamma((-1, 1))$.

(b) Wir setzen

$$\alpha := \frac{1}{2} \min\{\|x_j - x_k\| : 0 \leq j, k \leq n \text{ mit } j \neq k\}.$$

Sei nun $y \in M$ gegeben. Nun wählen wir $U := B_\alpha(y)$ als offene Umgebung von y in $\mathbb{R}^n$, $V := B_\alpha(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und setzen $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(x) = x - y$. Dann ist offensichtlich $\varphi(y) = 0$, $\varphi(U) = V$ und φ ist ein Diffeomorphismus. Weiter gilt

$$\varphi(U \cap M) = \{\varphi(y)\} = \{0\} = V \cap \{0\}.$$

Also ist M eine nulldimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Hausübungen

(H 1)

Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$x\cos(z) + y\sin(z) + (x+y+z)^{42} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \qquad x^2+y^2+z^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

in einer Umgebung des Punktes $x_0 = \frac{\pi}{4}$ eindeutig eine Funktion $h(x) = (y(x), z(x))$ mit $h(\pi/4) = (0, -\pi/4)^T$ definiert wird und berechnen Sie $h'(\pi/4)$.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos(z) + y\sin(z) + (x+y+z)^{42} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ x^2+y^2+z^2 - \frac{\pi^2}{8}. \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$F(\pi/4, 0, -\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und F ist offensichtlich stetig differenzierbar. Zur Anwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen prüfen wir noch die Invertierbarkeit der entsprechenden Ableitungsmatrix nach. Es ist

$$D_{(y,z)}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(z) + 42(x+y+z)^{41} & -x\sin(z) + y\cos(z) + 42(x+y+z)^{41} \\ 2y & 2z \end{pmatrix}$$

und damit

$$D_{(y,z)}F(\pi/4, 0, -\pi/4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\det\big(D_{(y,z)}F(\pi/4, 0, -\pi/4)\big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Also gibt es nach dem Satz über implizit definierte Funktionen eine Umgebung W von $\pi/4$ und eine eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion $h : W \to \mathbb{R}^2$ mit $h(\pi/4) = (0, -\pi/4)^T$ und $F(x, h(x)) = 0$ für alle $x \in W$, d.h. es gilt für alle $x \in W$

$$x\cos(h_2(x)) + h_1(x)\sin(h_2(x)) + (x + h_1(x) + h_2(x))^{42} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad x^2 + h_1(x)^2 + h_2(x)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Zur Berechnung von $h'(\pi/4)$ nutzen wir die Formel aus demselben Satz und erhalten

$$\begin{aligned} h'(\pi/4) &= -\big[D_{(y,z)}F(\pi/4, 0, -\pi/4)\big]^{-1} \cdot D_xF(\pi/4, 0, -\pi/4) \\ &= -\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) \\ \pi/2 \end{pmatrix} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\pi}{4} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(H 2)

Verallgemeinern Sie die Aussage aus Aufgabe (G2) auf stetig differenzierbare Funktionen $A : (0,1) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dazu können Sie wahlweise die Methode aus (G2) (a) oder (G2) (b) verwenden. Die Stetigkeit aus dem Hinweis zu Aufgabe (G2) dürfen Sie natürlich auch hier verwenden.

LÖSUNG: Die Wahlmöglichkeit der Aufgabe ist nur eine scheinbare, denn für $n \geq 5$ ist es schlicht nicht mehr möglich eine explizite Formel für die Eigenwerte anzugeben, da diese durch die Nullstellen eines Polynoms vom Grad n gegeben sind. Wir argumentieren also mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen.

Behauptung: Ist $A : (0,1) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig differenzierbar und ist $A(t)$ für jedes $t \in (0,1)$ eine symmetrische Matrix mit paarweise verschiedenen reellen Eigenwerten $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \cdots < \lambda_n(t)$, so ist für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ die Funktion $\lambda_j : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Beweis: Wir betrachten wieder die Funktion $F : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t,\lambda) = \det(\lambda - A(t)).$$

Dann ist F stetig differenzierbar, denn A ist stetig differenzierbar und die Determinante auch (Polynom!)

Da $F(\cdot,t)$ für jedes $t \in (0,1)$ das charakteristische Polynom von $A(t)$ ist und $A(t)$ die Eigenwerte $\lambda_j(t)$, $j = 1,\dots,n$, hat, gilt

$$F(t,\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j(t)), \quad t \in (0,1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Damit bekommen wir mit vielfacher Anwendung der Produktregel

$$\partial_2 F(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (\lambda - \lambda_k(t)).$$

Sei nun wieder $(t_0,\lambda_0) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ ein Punkt mit $F(t_0,\lambda_0) = 0$. Dann ist $\lambda_0 = \lambda_\ell(t_0)$ für ein $\ell \in \{0,\dots,n\}$. Für jedes $\ell = 1,\dots,n$ haben wir nun

$$\partial_2 F(t_0,\lambda_\ell(t_0)) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (\lambda_\ell(t_0) - \lambda_k(t_0)) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq \ell}}^{n} (\lambda_\ell(t_0) - \lambda_k(t_0)),$$

da in jedem anderen Summanden ein Faktor Null ist. Damit ist aber $\partial_2 F(t_0,\lambda_\ell(t_0)) \neq 0$, denn die nun übrig gebliebenen Faktoren dürfen alle gerade nicht Null sein, denn sonst hätten wir einen (mindestens) doppelten Eigenwert.

Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun wieder ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $\lambda : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(t_0) = \lambda_0$ und

$$F(t,\lambda(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon),$$

d.h. für jedes $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ist $\lambda(t)$ ein Eigenwert von $A(t)$.

Es bleibt wieder zu zeigen, dass $\lambda(t) = \lambda_\ell(t)$ für alle t in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gilt. Dazu nehmen wir wieder an, es gäbe ein $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ und ein $k \neq \ell$ mit $\lambda(t_1) = \lambda_k(t_1)$. Wieder ist die Funktion $g : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $g(s) := 2\lambda(s) - \lambda_\ell(s) - \lambda_k(s)$ stetig und wir erhalten genau so wie in (G2) den Widerspruch $\lambda_\ell(s^*) = \lambda_k(s^*)$ für ein $s^* \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. □

(H 3)

Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 2$ die obere Hälfte der Einheitssphäre

$$S_+^{n-1} := \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

LÖSUNG: Wir verwenden Satz VIII.3.2, d.h. wir identifizieren S_+^{n-1} als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge. Dazu setzen wir

$$O := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\|_2 < 1\}.$$

Dann ist O die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n-1}$, also insbesondere offen. Weiter betrachten wir $f : O \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) := \sqrt{1 - \|x\|_2^2}.$$

Diese Funktion f ist auf O stetig differenzierbar, da dort der Inhalt der Wurzel immer strikt positiv bleibt und $\|\cdot\|_2^2$ als Polynomfunktion beliebig differenzierbar ist. Also ist $\operatorname{graph}(f)$ nach Satz VIII.3.2 eine $(n-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in O\} = S_+^{n-1}$ gilt.

Wir beweisen zunächst „$\subseteq$“:

Sei $x \in O$. Dann gilt $f(x) > 0$ und

$$\|(x, f(x))\|_2^2 = \|x\|_2^2 + f(x)^2 = \|x\|_2^2 + 1 - \|x\|_2^2 = 1.$$

Also ist $(x, f(x)) \in S_+^{n-1}$.

Für die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ sei $x \in S_+^{n-1}$ gegeben. Dann gilt für $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$

$$1 = \|x\|_2^2 = \|x'\|_2^2 + x_n^2.$$

Daraus folgt nun zum Einen, wegen $x_n > 0$ die strikte Ungleichung $\|x'\|_2^2 < 1$, d.h. $x' \in O$ und zum anderen

$$f(x') = \sqrt{1 - \|x'\|_2^2} = \sqrt{x_n^2} = |x_n| = x_n,$$

da x_n positiv ist. Das bedeutet aber gerade, dass $(x', f(x')) = x$ gilt, d.h. $x \in \operatorname{graph}(f)$.