Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 19.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Auf der Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A \text{ invertiertbar}\}$ betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Inv} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$ aus Lemma VII.1.5 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass Inv stetig ist.

LÖSUNG: Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und bezeichnet $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1} = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$ die Inverse zu A, dann gilt nach der Cramerschen Regel

$$b_{ij} = \frac{\det(A_{ij})}{\det(A)} := \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, \mathrm{e}_j, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det(A)}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

wobei a^k die k-te Spalte von A und e_k den k-ten Einheitsvektor bezeichnet. Da sowohl $A \mapsto \det(A_{ij})$ (Polynom!), also auch $A \mapsto \det(A)$ stetige Abbildungen sind und $\det(A) \neq 0$ gilt, ist auch $A \mapsto \det(A_{ij})/\det(A) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ für jedes $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ eine stetige Abbildung. Das bedeutet, dass jede Koordinatenfunktion von Inv stetig ist und da $\dim \mathbb{R}^{n \times n} = n^2$ endlich ist, folgt damit die Stetigkeit von Inv.

(G 2)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := (x^3 + xy + 1,\ x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3,4)$ abgebildet wird und berechnen Sie den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3,4)$, sowie den Wert ihrer Ableitung an dieser Stelle.

LÖSUNG: Wir wenden den Satz über die Umkehrabbildung VIII.1.3 mit $a = (1,1)^T$ und $b = f(a) = (3,4)^T$ an. Dazu müssen wir zunächst sicherstellen, dass f in einer Umgebung von a stetig differenzierbar ist. Da f in jeder Komponente durch ein Polynom gegeben ist, ist das kein Problem und es gilt

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 1 & 1 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter hat die Matrix

$$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Determinante $15 \neq 0$ und ist damit invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert also eine Umgebung U von $(1,1)^T$ und eine Umgebung V von $(3,4)$, so dass $\tilde{f} = f|_U : U \to V$ bijektiv ist.

Der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle $(3,4)^T$ ist natürlich das Urbild unter $\tilde{f}$, also $\tilde{f}^{-1}(3,4) = (1,1)^T$.

Zur Bestimmung der Ableitung in $(3,4)^T$ verwenden wir schließlich die Formel aus dem Satz über die Umkehrabbildung und erhalten

$$J_{\tilde{f}^{-1}}(3,4) = (J_{\tilde{f}}(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(G 3)

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) f ist offen.

(b) Die Funktion $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|f(x)\|$ nimmt auf $\overline{U}$ ein globales Maximum an.

(c) $\max_{x\in\overline{U}} g(x) > g(y)$ für alle $y \in U$.

(d) Ist $x_0 \in \overline{U}$ eine globale Maximalstelle von g, so gilt $x_0 \in \partial U$, d.h. die Funktion g nimmt ihr Maximum auf dem Rand an.

LÖSUNG: (a) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz von der offenen Abbildung VIII.1.6.

(b) Die Funktion ist als Hintereinanderausführung der auf $\overline{U}$ stetigen Funktion f und der auf $\mathbb{R}^n$ stetigen Normabbildung selbst eine stetige Funktion. Weiter ist $\overline{U}$ nach Voraussetzung beschränkt und offensichtlich abgeschlossen, also kompakt. Also nimmt g auf $\overline{U}$ ein globales Maximum an.

(c) Wir nehmen an, es gäbe ein $x_0 \in U$, so dass für alle $x \in \overline{U}$ die Ungleichung $\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\|$ gilt. Da $f(x_0) \in f(U)$ ist und $f(U)$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subseteq f(U)$ ist. Insbesondere ist damit

$$y := f(x_0)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|f(x_0)\|}\right) \in f(U),$$

denn

$$\|y - f(x_0)\| = \frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|}\right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also gibt es ein $x \in U$ mit $f(x) = y$. Für dieses gilt dann aber

$$\|f(x)\| = \|y\| = \left\|f(x_0)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|f(x_0)\|}\right)\right\| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|f(x_0)\|}\right)\|f(x_0)\| > \|f(x_0)\|,$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Also gibt es für jedes $x_0 \in U$ ein $x \in \overline{U}$ mit $\|f(x)\| > \|f(x_0)\|$, woraus schließlich

$$\max_{x\in\overline{U}} g(x) > g(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in U$$

folgt.

(d) Ist x_0 eine globale Maximalstelle von g in $\overline{U}$, so kann x_0 wegen (c) nicht in U liegen, also muss $x_0 \in \partial U$ sein.

Hausübungen

(H 1)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^2, \; f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(f)$ und entscheiden Sie ob f ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie weiter alle Punkte an, um die es eine Umgebung gibt, so dass die Einschränkung von f auf diese Umgebung ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie schließlich in der Umgebung eines (von Ihnen gewählten) Punktes eine (von Ihnen gewählte) Umkehrfunktion.

LÖSUNG: Wir zeigen, dass $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. Sei dazu $(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gegeben. Dann müssen wir eine Lösung (x,y) des Gleichungssystems $f(x,y) = (u,v)^T$ finden, d.h.

$$x^2 - y^2 = u \quad \text{und} \quad 2xy = v.$$

Ist $u \geq 0$, so ist die erste Gleichung erfüllt falls $x = \sqrt{u + y^2}$ ist. Man beachte, dass es im Moment nicht darum geht, *jede* Lösung des Gleichungssystems zu finden, sondern es reicht *eine*.

Setzt man das in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$2y\sqrt{u + y^2} = u.$$

Eine Lösung dieser Gleichung finden wir nach Quadrieren:

$$4y^2(u + y^2) = u^2 \iff y^4 + uy^2 - \frac{1}{4}v^2 = 0 \Longleftarrow y^2 = -\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4}} = -\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Einsetzen liefert

$$x = \sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad y = \pm\sqrt{-\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}},$$

wobei das Vorzeichen bei y je nach dem Vorzeichen von v gewählt werden muss.

Ist $u < 0$, so betrachtet man das Gleichungssystem

$$y^2 - x^2 = -u \quad \text{und} \quad 2yx = v$$

und erhält durch das Vertauschen der Rollen von x und y

$$x = \pm\sqrt{-\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}},$$

wobei jetzt das Vorzeichen von x in Funktion des Vorzeichens von v gewählt werden muss.

Offensichtlich ist f nicht injektiv und damit kein Diffeomorphismus, denn für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x,y) = f(-x,-y)$.

Um die Punkte zu identifizieren, in deren Umgebung f lokal umkehrbar ist, verwenden wir den Satz über die Umkehrabbildung VIII.1.3. Offensichtlich ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mit $\det(J_f(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also existiert eine lokale Umkehrfunktion in der Umgebung jedes Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nach der obigen Rechnung ist eine lokale Umkehrfunktion in einer Umgebung des Punktes $(0,2)^T$ mit $f^{-1}(0,2) = (1,1)^T$ gegeben durch

$$f^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \sqrt{-\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + v^2}}, \end{pmatrix}.$$

Die Angabe des Bildpunktes $(1,1)$ ist wichtig, denn in einer Umgebung des Punktes $(0,2)^T$ gibt es auch noch eine lokale Umkehrfunktion von f mit $f^{-1}(0,2) = (-1,-1)$!

(H 2)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x + \sin(y),\ y\cos(x))$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ eine lokale Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $(0,0)$.

LÖSUNG: Wir verwenden wieder den Satz über die lokale Umkehrabbildung. Dazu beobachten wir, dass f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(y) \\ -y\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

und damit

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was eine invertierbare Matrix ist. Also existieren nach Satz VIII.1.3 Umgebungen U von $(0,0)$ und V von $f(0,0) = (0,0)$, so dass $\tilde{f} := f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist und damit eine Umkehrfunktion besitzt. Deren Ableitung in $(0,0) = f(0,0)$ erhalten wir durch

$$J_{\tilde{f}^{-1}}(0,0) = J_{\tilde{f}}(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(H 3)

Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (x - y,\ \mathrm{e}^{x+y}).$$

(a) Geben Sie $f(\mathbb{R}^2)$ an, bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist, und berechnen Sie in all diesen Punkten eine lokale Umkehrfunktion.

(b) Geben Sie ein maximales Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf dem f injektiv ist, d.h. so dass es kein Gebiet G' mit $G \subsetneq G'$ gibt, auf dem f immer noch injektiv ist.

(c) Ist f ein Diffeomorphismus? Falls ja, berechnen Sie die Ableitung $(f^{-1})'$ der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(G) \to G$ von f.

LÖSUNG: (a) Offensichtlich ist $f(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Beim Berechnen der Umkehrfunktion werden wir auch gleich sehen, dass sogar Gleichheit gilt.

Da f offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist, existiert nach dem Satz über die Umkehrabbildung in jedem Punkt (x,y) eine lokale Umkehrfunktion, in dem die Ableitung

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}$$

eine stetig invertierbare Matrix ist. Da $\det(J_f(x,y)) = 2\mathrm{e}^{x+y} \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist, gilt das also für jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$.

Tatsächlich gibt es sogar eine globale Umkehrfunktion von f, wie man bei der Berechnung der Umkehrfunktion feststellt. Soll nämlich

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

sein, so können wir dank $v > 0$ in der zweiten Koordinaten den Logarithmus bilden und erhalten das Gleichungssystem

$$x - y = u \quad \text{und} \quad x + y = \ln(v),$$

das sich *eindeutig* zu

$$x = \frac{\log(v) + u}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{\log(v) - u}{2}$$

lösen lässt.

Damit ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times (0, \infty)$ bijektiv und die (globale) Umkehrfunktion ist $f^{-1} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\log(v)+u}{2} \\ \frac{\log(v)-u}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ injektiv ist, ist $G = \mathbb{R}^2$.

(c) Auf $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist f^{-1} stetig differenzierbar, also ist f ein Diffeomorphismus und wir könnten die Ableitung mit Hilfe der Formel aus dem Satz über die Umkehrabbildung bestimmen. Da wir die Umkehrabbildung aber explizit haben, können wir auch einfach direkt ableiten:

$$J_{f^{-1}}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v} \\ -1 & \frac{1}{v} \end{pmatrix}.$$