Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 5.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

5. Übung mit Lösungshinweisen

Dieses Blatt enthält die Hausübungen zur 5. und 6. Übung. Ihre Bearbeitungen sind bis zum 19.5.2008 bei Ihrer Übungsleiterin bzw. Ihrem Übungsleiter abzugeben.

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^{30}y^{25}z^{10} + 15x^2y^{15}z^3 + 3y^2z^2 + 42$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ mit $g(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$.

Bei Umordnung dieser Reihe in eine Potenzreihe bezüglich x mit Koeffizienten, die von y abhängen, erhält man für jedes y einen Konvergenzradius. Bestimmen Sie diesen.

Lösung: 1. Da f ein Polynom ist, stimmt die Funktion mit ihrer Taylorreihe überein. Es gilt also $T_f(x, y, z) = x^{30}y^{25}z^{10} + 15x^2y^{15}z^3 + 3y^2z^2 + 42$.

2. Mit geometrischer Reihe folgt für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x + y| < 1$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(x+y)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n}\binom{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}.\end{aligned}$$

Für die Darstellung in eine Potenzreihe bzgl. x schreiben wir wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe für $|x| < |1 - y|$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-y-x} &= \frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{1-y}} = \frac{1}{1-y}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-y}\right)^n\\ &= \frac{1}{1-y}\sum_{n=0}^{\infty}(1-y)^{-n}x^n.\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offensichtlich $R = |1 - y|$.

(G 2)

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Beweisen Sie, dass $\|x^\alpha\|_2 \le \|x\|_2^{|\alpha|}$ gilt.

(b) Zeigen Sie die Leibniz-Regel für Multiindizes:

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, so gilt für $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha(f \cdot g) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

Hierbei haben wir $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ gesetzt. Außerdem gilt $\beta \leq \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

LÖSUNG: 1. Es gilt

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &= |\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i} \\ &\leq \prod_{i=1}^n \|x\|_2^{\alpha_i} = \|x\|_2^{\sum \alpha_i} = \|x\|_2^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

2. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion über $|\alpha|$. Die Induktionsverankerung $|\alpha| = 1$ ist genau die Produktregel für partielle Ableitungen.

   Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussage für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k \geq 1$ gilt. Zu $\tilde{\alpha}$ mit $|\tilde{\alpha}| = k + 1$ wählen wir einen Einheitsvektor e_i und α mit $|\alpha| = k$, so dass $\tilde{\alpha} = \alpha + e_i$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} D^{\tilde{\alpha}}(fg) &= \partial_i D^\alpha(fg) \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\beta+e_i} f D^{\alpha-\beta} g + D^\beta f D^{\alpha+e_i-\beta} g) \\ &= f D^{\tilde{\alpha}} g + D^{\tilde{\alpha}} f g \\ &\quad + D_i f D^\alpha g + \sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\beta+e_i} f D^{\tilde{\alpha}-\beta-e_i} g + D^\beta f D^{\tilde{\alpha}-\beta} g) + D^\alpha f D_i g. \end{aligned}$$

   Wir ordnen die Terme in der letzten Zeile um. Dies ergibt

$$\begin{aligned} D^{\tilde{\alpha}}(fg) &= f D^{\tilde{\alpha}} g + D^{\tilde{\alpha}} f g + \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha, \beta_i \geq 1} \left(\binom{\alpha}{\beta - e_i} + \binom{\alpha}{\beta} \right) D^\beta f D^{\alpha-\beta} g \\ &= \sum_{0 \leq \beta \leq \tilde{\alpha}} \binom{\tilde{\alpha}}{\beta} D^\beta f D^{\tilde{\alpha}-\beta} g \end{aligned}$$

   Nach der Summationsformel für Binomialkoeffizienten. Damit folgt insgesamt die Leibniz-Regel.

(G 3)

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine homogene Funktion vom Grad 2 (d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass f eine quadratische Form also $f(x) = x^T A x$ ist, wobei A eine $n \times n$ Matrix ist. Berechnen Sie A.

LÖSUNG: Wir benutzen die Taylor-Formel mit Restglied der Ordnung $m = 2$.

Zunächst aber berechnen wir die Ableitungen im Punkt $x = 0$. Da f homogen vom Grad 2 ist, folgt also $f(2x) = 4f(x)$, also gilt insbesondere $f(0) = 0$. Außerdem folgt mit der Kettenregel

$$t^2(\nabla f)(x) = \nabla(t^2 f)(x) = \nabla f(tx) = (\nabla f)(tx) \cdot t$$

also $\nabla f(tx) = t\nabla f(x)$. Analog folgt $D^2 f(tx) = D^2 f(x)$, also insbesondere $H_f(x) = H_f(0)$. Damit folgt $f(0) = 0 = \nabla f(0)$ und die Taylor-Formel für $m = 1$ liefert für ein $t \in [0,1]$

$$f(0+x) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0+tx) \cdot x^\alpha = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) \cdot x^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(0) x_i x_j = x^T A x$$

mit $A = \frac{1}{2} H_f(0)$.

Hausübungen

(H 1)

Es sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < 1\}$ und $M \geq 0$. Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und T_2 das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

a) Zeigen Sie: Sind alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung durch M beschränkt, so gilt

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{3} M \|(x,y)\|^3, \quad (x,y) \in U.$$

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) + \cos\left(\frac{2x-y}{2}\right)$$

im Entwicklungspunkt $(0,0)$ und zeigen Sie, dass für $(x,y) \in U$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{3} \cdot 2 \|(x,y)\|^3.$$

LÖSUNG: 1. Für ein $\tau \in [0,1]$ gilt nach dem Satz von Taylor

$$f(x,y) = T_2(x,y) + \sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(\tau(x,y))}{\alpha!} (x,y)\alpha.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - T_2(x,y)| &\leq \sum_{|\alpha|=3} \frac{M}{\alpha!} \|(x,y)^\alpha\|_2 \\
&\leq M \|(x,y)\|^3 \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} \\
&= M \|(x,y)\|^3 (\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \\
&= \frac{4}{3} M \|(x,y)\|^3.
\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+2y}{2}\right) - \sin\left(\frac{2x-y}{2}\right)\\
\partial_2 f(x,y) &= \cos\left(\frac{x+2y}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2x-y}{2}\right)\\
\partial_{11} f(x,y) &= -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) - \cos\left(\frac{2x-y}{2}\right)\\
\partial_{12} f(x,y) &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x-y}{2}\right)\\
&= \partial_{21} f(x,y)\\
\partial_{22} f(x,y) &= -\sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun $f(0,0) = 1$, $\partial_1 f(0,0) = \frac{1}{2}$, $\partial_2 f(0,0) = 1$, $\partial_{11} f(0,0) = -1$, $\partial_{12} f(0,0) = \frac{1}{2}$, $\partial_{22} f(0,0) = -\frac{1}{4}$. Also gilt

$$T_2 f(x,y) = 1 + \frac{x}{2} + y - \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{1}{8}y^2.$$

Da jede Ableitung von f durch $M = 2$ beschränkt ist, folgt aus dem ersten Teil

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \le \frac{4}{3}M\|(x,y)\|^3 = \frac{8}{3}\|(x,y)\|^3.$$

(H 2)

Es sei $r > 0$ und $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um 0 mit Radius r. Weiter sei $f : B(0,r) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen von f mögen einer Abschätzung

$$|D^\alpha f(x)| \le \alpha! a_{|\alpha|}$$

für alle $x \in B(0,r)$ genügen. Zeigen Sie, dass die Funktion mit ihrer Taylorreihe übereinstimmt, d.h. $R_m f(x) \to 0$ für $m \to \infty$, für alle $x \in B(0,r)$, falls der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ größer oder gleich r ist.

Lösung: Da der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ größer oder gleich r ist, folgt aus der vorausgesetzten Abschätzung an die Ableitungen von f, dass die Taylorreihe von f in $B(0,r)$ absolut konvergiert. Für die Gleichheit $f = Tf(x)$ schätzen wir das Restglied des Taylorpolynoms ab. Es gilt $\|x^\alpha\|_2 \le \|x\|_2^{|\alpha|}$. Das Restglied lässt sich, da es höchstens $(m+1)^n$ Indizes mit $|\alpha| = m$ gibt durch

$$|R_{m-1}(x) = \left|\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\tau x)}{\alpha!} x^a\right| \le a_m (m+1)^n \|x\|_2^m$$

mit $\|x\|_2 < r$ abschätzen. Die rechte Seite dieser Ungleichung strebt gegen 0 für $m \to \infty$, da die Reihe $\sum a_m (m+1)^n t^m$ einen Konvergenzradius größer oder gleich r hat.

(H 3)

Berechnen Sie Δu für die Funktionen

(a) $u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^\alpha$ (b) $u_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2} e^{\alpha\|x\|_2}$

wobei $\alpha \neq 0$ ist. Geben Sie weiter alle Fälle an, in denen die jeweilige Funktion einer Differentialgleichung $\Delta u = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt.

Lösung: Nach Vorlesung gilt $\Delta f(x) = F''(r) + \frac{n-1}{r}F'(r)$, falls $f(x) = F(\|x\|_2) = F(r)$. Setzen wir $r = \|x\|_2$, so gilt

(a) für $f(x) = \|x\|_2^\alpha$, dass $\Delta f(x) = r^{\alpha-2}\alpha(\alpha+n-2)$ und damit gilt für $\alpha = 2-n$, dass $\Delta f = 0$ gilt.

(b) für $g(x) = \frac{1}{\|x\|_2}\mathrm{e}^{\alpha\|x\|_2}$, dass $\Delta g(x) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\alpha r}\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{r}(n-3) - \frac{1}{r^2}(n-3)\right)$. Damit folgt für $n = 3$, dass $\Delta g = \alpha^2 g$.

6.Übung
Hausübungen

(H 4)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y,$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy + 1.$

Lösung: (a): Es gilt $\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{x^2} - 4$ und $\partial_2 f(x,y) = -\frac{1}{y^2} + 1$. Also sind die Punkte $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(-\frac{1}{2}, -1)$ die kritischen Punkte von f. Für die Hesse-Matrix gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Also ist H_f indefinit in den Punkten $(\frac{1}{2}, 1)$ und $(-\frac{1}{2}, -1)$ die Funktion hat dort daher jeweils einen Sattelpunkt. H_f ist positiv definit in $(-\frac{1}{2}, 1)$ und f hat dort ein lokales Minimum. H_f ist negativ definit in $(\frac{1}{2}, -1)$ und hat dort ein lokales Maximum.

(b): Es gilt $\partial_1 f(x,y) = 2x - 2y = -\partial_2 f(x,y)$ und daher sind alle Punkte (t,t) kritische Punkte. Da $f(x,y) = (x-y)^2 + 1$ folgt $f(t,t) = 1$ und $f(x,y) \geq 1$ für alle (x,y). Also hat f in den kritischen Punkten jeweils ein lokales Minimum.

(H 5)

Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktionen

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

nach Maxima, Minima und Sattelpunkten.

Lösung: Es gilt $\partial_1 f(x,y) = 3x^2 + 3\alpha y$, $\partial_2 f(x,y) = -3y^2 + 3\alpha x$ und $\partial_{11} f(x,y) = 6x$, $\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 3\alpha$, $\partial_{22} f(x,y) = -6y$.

Kritische Punkte:

1.Fall $\alpha = 0$:

$3x^2 = 0$ und $-3y^2 = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y = 0$. Also ist $(0,0)$ einziger kritischer Punkt. Da $f(0,0) = 0$ und $f(\varepsilon, 0) > 0$ und $f(0,\varepsilon) < 0$ folgt, dass $(0,0)$ keine Extremstelle ist.

2.Fall $\alpha \neq 0$:

Aus $3x^2 + 3\alpha y = 0$ folgt $y = \frac{-x^2}{\alpha}$. Einsetzen in $\partial_2 f$ ergibt $-3(-x^2/\alpha)^2 + 3\alpha = 0$, also $x^4/\alpha^2 + \alpha x = 0$. Ist $x = 0$, so folgt $y = 0$ und damit ist $N_1 = (0,0)$ ein kritischer Punkt. Ist $x \neq 0$, so folgt $x^3 = \alpha^3$ also $x = \alpha$ und $y = -\alpha$ und $N_2 = (\alpha, -\alpha)$ ist ein weiterer kritischer Punkt.

Wir untersuchen die Hesse Matrix an den kritischen Stellen. Es gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist indefinit (Eigenwerte sind $\pm 3\alpha$). Also ist N_1 ein Sattelpunkt.

Weiter gilt

$$H_f(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für $\alpha > 0$ positiv definit ($6\alpha > 0$ und $36\alpha^2 - 9\alpha^2 > 0$) und daher hat für $\alpha > 0$ die Funktion f in N_2 ein lokales Minimum.

Ebenso ist für $\alpha < 0$ die Hesse-Matrix in N_2 negativ definit. Die Funktion hat dort also ein Maximum.

(H 6)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 3x^4 - 4x^2y + y^2,$$

eingeschränkt auf eine Gerade durch den Ursprung, dort ein lokales Minimum besitzt. Ist der Ursprung lokales Minimum von f?

LÖSUNG: Eine Gerade durch den Ursprung wird definiert durch ein $v \in \mathbb{R}^2$ und es gilt $G = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$. Die Funktion f eingeschränkt auf die Gerade G ist daher

$$f_G(t) := 3v_1^4t^4 - 4v_1^2v_2t^3 + v_2^2t^2.$$

Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f sind gegeben durch $f_G'(t) = 12v_1^4t^3 - 12v_1^2v_2t^2 + 2v_2^2t$ und $f_G''(t) = 36v_1^4t^2 - 24v_1^2v_2t + 2v_2^2$. Also gilt $f_G'(0) = 0$ und $f_G''(0) > 0$ und daher hat f_G in 0 ein lokales Minimum, falls $v_2 \neq 0$. Ist $v_2 = 0$ so ist $f_G(t) = 3v_1^4t^4$ und es ist unmittelbar klar, dass dann f_G ein Minimum in 0 hat.

Andererseits gilt $f(0, 0) = 0$ und $f(\varepsilon/2, \varepsilon^2/2) = -\frac{1}{16}\varepsilon^4 < 0$. Also kann f in $(0, 0)$ kein lokales Minimum haben, da es in jeder Umbegung der Null Punkte der Form $(\varepsilon/2, \varepsilon^2/2)$ gibt.