Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 28.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \int_1^{x^2+1} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-(xt)^2} \,\mathrm{d}t$$

die Ableitung h'.

LÖSUNG: Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u,v) := \int_1^u \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-(vt)^2} \,\mathrm{d}t.$$

Dann ist $h(x) = F(x^2+1, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wir leiten also F ab. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{u} \mathrm{e}^{-(uv)^2}.$$

Differentiation nach dem Parameter v ergibt mit Hilfe der Substitution $r = (tv)^2$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \int_1^u \frac{1}{t}(-2v)t^2 \mathrm{e}^{-(tv)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -2v \int_1^u t\mathrm{e}^{-(tv)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{v} \int_{v^2}^{(uv)^2} \mathrm{e}^{-r} \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{v} \left(\mathrm{e}^{-(uv)^2} - \mathrm{e}^{-v^2} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) := \begin{pmatrix} x^2+1 \\ x \end{pmatrix}$, so gilt dank der Kettenregel

$$\begin{aligned} h'(x) &= \nabla F(g(x)) \cdot g'(x) = \nabla F(x^2+1, x) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{x^2+1} \mathrm{e}^{-x^2(x^2+1)^2}, \frac{1}{x} \left(\mathrm{e}^{-x^2(x^2+1)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{e}^{-x^2(x^2+1)^2} + \frac{1}{x} \left(\mathrm{e}^{-x^2(x^2+1)^2} - \mathrm{e}^{-x^2} \right) \\ &= \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)} \mathrm{e}^{-x^2(x^2+1)^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}. \end{aligned}$$

(G 2)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar. Geben Sie bei den folgenden Abbildungen jeweils an, von welchem Raum in welchen Raum sie abbilden und ob sie linear, bilinear, trilinear,... oder gar nichts davon sind.

1. $u \mapsto D^2 f(x_0)(u,v)$,	2. $x_0 \mapsto D^2 f(x_0)(u,v)$,	3. $v \mapsto D^2 f(x_0)(u,v)$,
4. $(u,v) \mapsto D^2 f(x_0)(u,v)$,	5. $u \mapsto D^2 f(x_0)(u,u)$,	6. $v \mapsto D^2 f(x_0)(v,u)$,
7. $(u,x_0) \mapsto D^2 f(x_0)(u,v)$,	8. $u \mapsto D^3 f(x_0)(u,v,w)$,	9. $(u,v) \mapsto D^3 f(x_0)(u,v,w)$,
10. $(u,v,w) \mapsto D^3 f(x_0)(u,v,w)$	11. $x_0 \mapsto D^3 f(x_0)(u,v,w)$,	12. $x_0 \mapsto D^2 f(x_0)(u,\cdot)$.

Hierbei nehmen wir jeweils die Größen, die nicht links vom „$\mapsto$“ stehen, als konstant gegeben an.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Hesse-Matrix $H_f(x)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2^2+1} - \sin(x_2)$$

und berechnen Sie $D^2 f(0)(\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2)$.

LÖSUNG: (a)
1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, linear,
2. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gar nicht linear,
3. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, linear,
4. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bilinear,
5. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gar nicht linear,
6. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, linear,
7. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gar nicht linear,
8. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, linear,
9. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bilinear,
10. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trilinear,
11. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gar nicht linear,
12. $\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, gar nicht linear.

(b) Es ist

$$\nabla f(x_1,x_2) = \left(\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x^2+1}, -\frac{2x_2\mathrm{e}^{x_1}}{(x_2^2+1)^2} - \cos(x_2)\right).$$

Die größte Arbeit ist nun, die zweite Komponente des Gradienten wieder nach x_2 abzuleiten. Das ergibt:

$$\begin{aligned}\partial_2^2 f(x_1,x_2) &= -\mathrm{e}^{x_1}\frac{2(x_2^2+1)^2 - 2x_2 \cdot 2(x_2^2+1)\cdot 2x_2}{(x_2^2+1)^4} + \sin(x_2)\\ &= -\mathrm{e}^{x_1}\frac{2x_2^2+2-8x_2^2}{(x_2^2+1)^3} + \sin(x_2) = \sin(x_2) - \frac{\mathrm{e}^{x_1}(2-6x_2^2)}{(x_2^2+1)^3}\end{aligned}$$

Zusammen mit den anderen zweiten Ableitungen bekommen wir

$$H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_1,x_2) & \partial_1\partial_2 f(x_1,x_2) \\ \partial_2\partial_1 f(x_1,x_2) & \partial_2^2 f(x_1,x_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2^2+1} & -\frac{2x_2\mathrm{e}^{x_1}}{(x_2^2+1)^2} \\ -\frac{2x_2\mathrm{e}^{x_1}}{(x_2^2+1)^2} & \sin(x_2) - \frac{\mathrm{e}^{x_1}(2-6x_2^2)}{(x_2^2+1)^3}\end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$D^2 f(0)(\mathrm{e}_1, 2\mathrm{e}_2) = (1,2)\cdot H_f(0)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (1,2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (1,-4)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -7.$$

(G 3)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ seien zwei Mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\nabla f \mid \nabla g) + g\Delta f$$

gilt, wobei der *Laplace-Operator* Δ durch

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x), \quad x \in U,$$

gegeben ist.

LÖSUNG: Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Unter Berücksichtigung der Produktregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(x) \cdot g(x)) = g(x)\frac{\partial f}{\partial x_j} + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad x \in U.$$

Hieraus folgt für $x \in U$ die Identität

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(f(x)g(x)) &= \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + g(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x) \\ &= f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x) + 2\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + g(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (fg)}{\partial x_j^2}(x) \\ &= f(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x) + 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + g(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) \\ &= f(x)\Delta g(x) + 2(\nabla f(x)|\nabla g(x)) + g(x)\Delta f(x), \quad x \in U.\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\nabla f|\nabla g) + g\Delta f.$$

Hausübungen

(H 1)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 y \sin(\frac{y}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x,y)$ und $\partial_2 f(x,y)$ von f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass $\partial_1 f$ für alle $y \neq 0$ im Punkt $(0,y)$ unstetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit in $(0,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG: (a) Für $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= 2xy\sin(\frac{y}{x}) - x^2y^2\cos(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2} \\ &= 2xy\sin(\frac{y}{x}) - y^2\cos(\frac{y}{x})\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_2 f(x,y) &= x^2\sin(\frac{y}{x}) + x^2 y\cos(\frac{y}{x})\frac{1}{x}\\ &= x^2\sin(\frac{y}{x}) + xy\cos(\frac{y}{x}).\end{aligned}$$

Für $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 0\}$ beobachten wir

$$\begin{aligned}\partial_1 f(0,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} hy\sin(\frac{y}{h}) = 0,\end{aligned}$$

wobei wir die Beschränktheit des Sinus genutzt haben. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\partial_2 f(0,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

Wir untersuchen $\partial_1 f$ im Punkte $(0,y)$, $y\neq 0$, auf Stetigkeit. Setze hierzu $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{y}{n\pi}, y\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $(x_n,y_n)\to(0,y)$ für $n\to\infty$, aber für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\partial_1 f(x_n,y_n) = 2\frac{y^2}{n\pi}\sin(n\pi) - y^2\cos(n\pi) = y^2\cos(n\pi) = y^2(-1)^n,$$

da $\sin(n\pi) = 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(\partial_1 f(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, woraus die Unstetigkeit von $\partial_1 f$ in $(0,y)$ für $y\neq 0$ folgt.

(b) Wir gehen über die Definition der Differenzierbarkeit vor. Kandidat für die Ableitung ist $(\nabla f)(0,y_0) = (0,0)^T$. Daher betrachten wir

$$\begin{aligned}r(x,y) &= \frac{f(x,y)-f(0,y_0)-\nabla f(0,y_0)\cdot\left[(x,y)^T-(0,y_0)^T\right]}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}\\ &= \frac{x^2y\sin(\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}.\end{aligned}$$

Es gilt daher

$$|r(x,y)| = \left|\frac{x^2y\sin(\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{\sqrt{x^2}}\right| \leq |xy|$$

und somit

$$0\leq \lim_{(x,y)\to(0,y_0)}|r(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,y_0)}|xy| = 0,$$

woraus

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} r(x,y) = 0$$

folgt. Mithin ist f differenzierbar in $(0,y)$.

(H 2)

Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und für je zwei Punkte $x,y\in U$ existiere ein Streckenzug $x = z_0, z_1, \ldots, z_l = y$ mit $\overline{z_{k-1}z_k}\in U$ für alle $k = 1,\ldots,l$. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f: U\to\mathbb{R}$ genau dann konstant auf U ist, wenn $\mathrm{grad} f(x) = 0$ für alle $x\in U$ gilt.

LÖSUNG: *Behauptung:* $\nabla f = 0$ in $U \iff f$ konstant auf U.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ Falls f konstant auf U ist, so verschwindet der Gradient - und wir haben nichts zu zeigen.

„$\Rightarrow$“ Seien $x, y \in U$. Wir zeigen, dass $f(x) = f(y)$ gilt. Nach Voraussetzung existiert ein Streckenzug $x = z_0, \ldots, z_l = y$ mit $\overline{z_{k-1}z_k} \subset U$, $k \in \{1, \ldots, l\}$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für ein $\xi \in \overline{z_{k-1}z_k} \subset U$ die Identität

$$f(z_k) - f(z_{k-1}) = \nabla f(\xi)(z_k - z_{k-1}) = 0 \cdot (z_k - z_{k-1}),$$

wobei wir die Voraussetzung genutzt haben. Daher folgt $f(z_k) = f(z_{k-1})$, $k \in \{1, \ldots, l\}$, und wir schließen $f(x) = f(y)$.

(H 3)

Es sei $\beta \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^\beta x$.

(a) Für welche Werte von β ist f in 0 differenzierbar?

(b) Für welche Werte von β und $m \in \{1, \ldots, n\}$ existiert die partielle Ableitung $\partial_m^2 f_m$?

LÖSUNG: (a) Zu Beginn betrachten wir den Sonderfall $\beta = 0$. Dann ist $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ offensichtlich eine differenzierbare Funktion und es gilt $Df(x) = I$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei also ab nun $\beta \neq 0$.

Zur Bestimmung eines Kandidaten für $Df(0)$ bestimmen wir zunächst die partiellen Ableitungen von f in Null, falls diese existieren. Dazu bezeichnen wir mit e_j den j-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Damit gilt für jedes $j = 1, \ldots, n$

$$\partial_j f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathrm{e}_j) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^\beta \|e_j\|_2^\beta \; t\mathrm{e}_j}{t} = \lim_{t\to 0} t^\beta \mathrm{e}_j.$$

Dieser Grenzwert existiert nun für $\beta < 0$ offensichtlich nicht, für $\beta = 0$ ist er e_j (s.o.) und für $\beta > 0$ kommt Null heraus.

Damit kann f nur für $\beta \geq 0$ in Null differenzierbar sein und für $\beta > 0$ ist die Ableitung dort Null. Wir überprüfen die Differenzierbarkeit in Null anhand der Definition. Es gilt

$$r(x) = f(x) - f(0) - Df(0)x = \|x\|_2^\beta x - 0 - 0 = \|x\|_2^\beta x$$

und für alle $\beta > 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \left\| \frac{r(x)}{\|x\|_2} \right\|_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\left\| \|x\|_2^\beta x \right\|_2}{\|x\|_2} = \lim_{x\to 0} \|x\|_2^\beta = 0.$$

Also gilt auch $\lim_{x\to 0} r(x)/\|x\|_2 = 0$ und f ist in Null differenzierbar.

(b) Zunächst existiert die fragliche zweite partielle Ableitung natürlich in allen Punkten $x \neq 0$. Wir konzentrieren uns also auf den Fall $x = 0$. Weiter bemerken wir wie in (a), dass für $\beta = 0$ die Ableitung existiert und Null ist. Es bleibt damit, vgl. (a), nur der Fall $\beta > 0$ zu untersuchen.

Wir berechnen dazu $\partial_m f_m(x)$ für $\beta > 0$, $x \neq 0$ und $m = 1, \ldots, n$. Mit $f_m(x) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\beta/2} x_m$ folgt

$$\partial_m f_m(x) = \frac{\beta}{2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{\beta}{2}-1} \cdot 2x_m x_m + \|x\|_2^\beta = \beta \|x\|_2^{\beta-2} x_m^2 + \|x\|_2^\beta$$

Damit können wir nun den Differenzenquotienten für $\partial_m^2 f_m(0)$ im Fall $\beta > 0$ untersuchen:

$$\begin{aligned}\partial_m^2 f_m(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\partial_m f_m(t\mathrm{e}_m) - \partial_m f_m(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\beta \|t\mathrm{e}_m\|_2^{\beta-2} t^2 + \|t\mathrm{e}_m\|_2^\beta - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\beta |t|^\beta + |t|^\beta}{t} = \lim_{t\to 0} (\beta + 1) \frac{|t|^\beta}{t}.\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert offensichtlich nicht für $0 < \beta < 1$. Weiter existiert er auch nicht für $\beta = 1$, denn dann erhält man

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{|t|}{t} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to 0-0} \frac{|t|}{t} = -1.$$

Im Fall $\beta > 0$ konvergiert der Ausdruck schließlich für $t \to 0$ gegen Null. Die partielle Ableitung $\partial_m^2 f_m(0)$ existiert also genau dann, wenn $\beta = 0$ oder $\beta > 1$ ist und ist in beiden Fällen Null.