Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 21.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

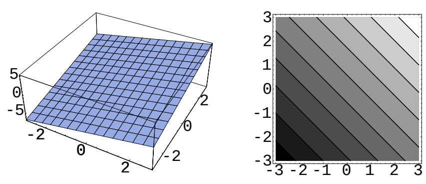
(G 1)

Im mathematischen Institut in Neustadt an der Weierstraße wurde eingebrochen. Es fehlen nur ein paar konvergente Reihen, aber bei den Funktionen in zwei Variablen ist vieles durcheinander geraten. Können Sie helfen und die Graphen und Höhenlinien, d.h. die Mengen, auf denen $f(x, y) = c$ für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ gilt, (s. die Bilder auf einem Extrablatt) der folgenden Funktionen wieder richtig zuordnen?

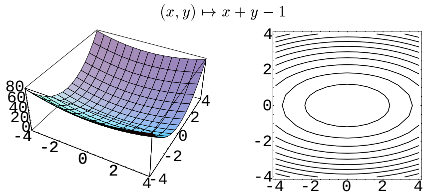
$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x + y - 1, & f_2(x,y) = x^2 + 4y^2, & f_3(x,y) = x^2 - y^2 - 8, \\ f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\ f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\ f_{10}(x,y) = x^3 - y^2 + 4, & f_{11}(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y). & \end{array}$$

Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, so dass einige Bilder ungenau sind.

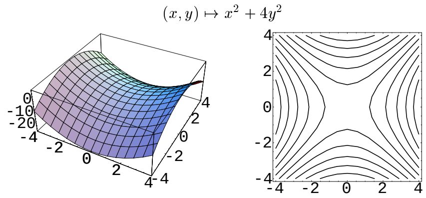
Lösung:



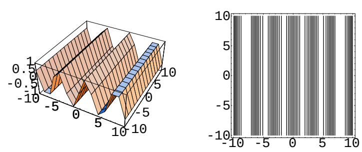
$(x, y) \mapsto x + y - 1$



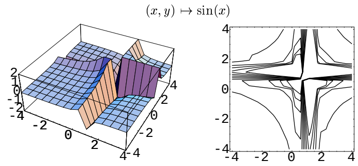
$(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$



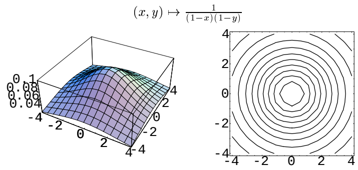
$(x, y) \mapsto x^2 - y^2 - 8$



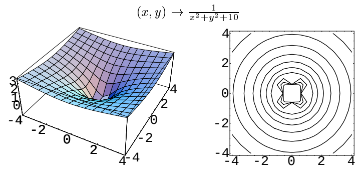
$(x, y) \mapsto \sin(x)$



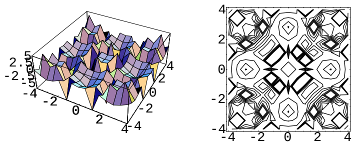
$(x, y) \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-y)}$



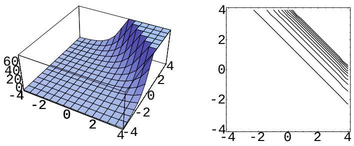
$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+10}$



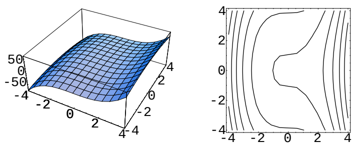
$(x, y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$



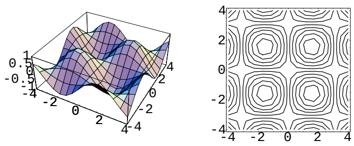
$(x, y) \mapsto \tan(x^2 + y^2)$



$(x, y) \mapsto e^{x+y}$



$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 + 4$



$(x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y)$

(G 2)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$, entscheiden Sie (ohne Begründung) ob sie jeweils beschränkt und/oder konvergent sind und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n := \left(n, \frac{1}{n}\right)^T, \quad b_n := \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n}{1+n}\right)^T, \quad c_n := \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)^T, \quad d_n := \left(\sin(\frac{n\pi}{4}), \cos(\frac{n\pi}{4})\right)^T.$$

(b) Geben Sie vier weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lösung: (a)
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und mithin auch nicht konvergent.
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n}{1+n}\right)^T = (0,1)^T$, also ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und beschränkt in $\mathbb{R}^2$.
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, also sowohl beschränkt, als auch konvergent.
- $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, jedoch nicht konvergent.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann geben wir die vier Nullfolgen
- $a_n := \left(\exp(-\pi n), \frac{1}{n^{17}}\right)^T$,
- $b_n := \left(\frac{1}{n^3}\cos(\frac{3}{n}), \frac{n^2}{n^5+7n}\right)^T$,
- $c_n := \left(2^{-n}, \tan(n^{-1})\right)^T$,
- $d_n := \left(\sin(\pi n), \frac{n^2}{\exp(n)}\right)^T$

in $\mathbb{R}^2$ an.

(c) (i) Wir untersuchen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ auf Stetigkeit, für die anderen Punkte ist diese klar. Sei hierzu $(0,0) \neq (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ und $m_n := \max\{x_n, y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^5}{m_n^2} = \lim_{n\to\infty} m_n^3 = 0.$$

Das beweist die Stetigkeit von f.

(ii) Wir untersuchen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ auf Stetigkeit, für die anderen Punkte ist diese klar. Sei dazu $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir beobachten

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Somit ist g in $0 \in \mathbb{R}^2$ unstetig.

(G 3)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \|(x,y)^T\|_2, & \text{falls } y > 0, \\ -\|(x,y)^T\|_2, & \text{falls } y < 0, \\ x, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $Df(x,y)$ und $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.

(b) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, für die die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ existiert.

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Lösung: (a) Wir bestimmen für $y \neq 0$ die partielle Ableitung der 2-Norm $(x,y) \mapsto \|(x,y)^T\|_2$ nach x zu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\|(x,y)^T\|_2}$$

und genauso nach y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}\right] = \frac{y}{\|(x,y)^T\|_2}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\|(x,y)\|_2}, & \text{falls } y > 0, \\ -\frac{x}{\|(x,y)\|_2}, & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\|(x,y)\|_2}, & \text{falls } y > 0, \\ -\frac{y}{\|(x,y)\|_2}, & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

Da diese Ausdrücke auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ stetig sind, folgt die Differenzierbarkeit von f auf dieser Menge mit Satz VII.1.11 und wir haben

$$Df(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right).$$

(b) Wir zeigen, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert. Seien dazu $v := (v_1, v_2)^T \neq (0,0)^T \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle; zunächst gelte $v_1 \neq 0$ und $v_2 = 0$. Dann gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tv_1}{t} = v_1.$$

Es sei nun $v_2 \neq 0$. Dann erhalten wir

$$\frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} \frac{\|t(v_1,v_2)\|_2}{t} &= \|v\|_2, & \text{falls } t > 0, \quad v_2 > 0, \\ -\frac{\|t(v_1,v_2)\|_2}{t} &= \|v\|_2, & \text{falls } t < 0, \quad v_2 > 0, \\ -\frac{\|t(v_1,v_2)\|_2}{t} &= -\|v\|_2, & \text{falls } t > 0, \quad v_2 < 0, \\ \frac{\|t(v_1,v_2)\|_2}{t} &= -\|v\|_2, & \text{falls } t < 0, \quad v_2 < 0. \end{cases}$$

Zusammen genommen gilt also

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} \|v\|_2, & \text{falls } v_2 > 0, \\ -\|v\|_2, & \text{falls } v_2 < 0, \\ v_1, & \text{falls } v_2 = 0. \end{cases}$$

(c) Wir zeigen, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist. Nehmen wir an f wäre dort differenzierbar, so ergäbe sich die Ableitung in $(0,0)$ als $(D_{e_1} f(0,0), D_{e_2} f(0,0)) = (1,1)$ nach Aufgabenteil (b). Sei nun $h_n := (\frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n})^T_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ und wir beobachten

$$\frac{(f(h_n) - f(0,0)) - (1,1) \cdot h_n}{\|h_n\|_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} - 0 - \frac{1}{n}((-1)^n + 1)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = 1 - \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus wird ersichtlich, dass der Grenzwert für $n \to \infty$ nicht existiert, was die Behauptung beweist.

Hausübungen

(H 1)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie die Richtungsableitungen $D_v f(0,0)$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, auf Existenz und geben Sie falls möglich $\operatorname{grad} f(0,0)$ an.

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

LÖSUNG: (a) Wir zeigen, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist. Dazu ist nur die Stetigkeit in $(0,0)$ zu untersuchen, denn in allen anderen Punkten ist die Funktion offensichtlich stetig. Hierzu sei $(0,0) \neq (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} |f(x_n, y_n)| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|y_n|}{1 + \frac{y_n^2}{x_n^2}} \leq \lim_{n \to \infty} |y_n| = 0.$$

Dies beweist die Behauptung.

(b) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt für die Richtungsableitung von f bezüglich v in Null

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{\|v\|_2^2}$$

und damit existiert die Richtungsableitung in Null bezüglich jeder Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, insbesondere auch in Richtung der Koordinateneinheitsvektoren, es gilt also

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \big(D_{e_1} f(0,0), D_{e_2} f(0,0)\big) = (0,0).$$

(c) Wäre f in $(0,0)$ differenzierbar, wäre die Ableitung dort nach den Ergebnissen in (b) $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$. Außerdem würde nach Satz VII.1.6 für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Beziehung $D_v f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot v$ gelten. Diese ist aber falsch, denn für $v_0 = (1,1)^T$ gilt nach (b)

$$D_{v_0} f(0,0) = \frac{1}{2} \neq 0 = (0,0) \cdot (1,1)^T = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot (1,1)^T.$$

Also ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

(H 2)

Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $E := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$. Wir definieren die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \big(\log(xy),\ \cos(x^2+y),\ \mathrm{e}^x\big) \quad \text{und} \quad g(u,v,w) := \mathrm{e}^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung

(a) nach der Kettenregel,

(b) direkt durch Ableiten von $h = h(x,y)$.

Lösung: (a) Wir prüfen zunächst alle Voraussetzungen der Kettenregel nach. Als Komposition differenzierbarer Abbildungen ist f offensichtlich für alle $(x,y) \in D$ differenzierbar. Außerdem ist $f(D) \subseteq E$, denn f geht nach $\mathbb{R}^3$ und es gilt $f_3(x,y) = \mathrm{e}^x > 0$ für alle $(x,y) \in D$. Schließlich ist g in allen Punkten aus E differenzierbar. Nach der Kettenregel ist also die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y).$$

Nun ist $Dg(u,v,w) = (\mathrm{e}^u,\ w,\ v + 1/w)$, d.h. wir haben

$$Dg(f(x,y)) = \big(xy,\ \mathrm{e}^x,\ \cos(x^2+y) + \mathrm{e}^{-x}\big)$$

und damit

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x,y) &= \big(xy, \mathrm{e}^x, \cos(x^2+y) + \mathrm{e}^{-x}\big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \big(y - 2x\mathrm{e}^x \sin(x^2+y) + \mathrm{e}^x \cos(x^2+y) + 1, x - \mathrm{e}^x \sin(x^2+y)\big). \end{aligned}$$

(b) Es gilt für alle $(x,y) \in D$ die Identität

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g(f(x,y)) = \mathrm{e}^{f_1(x,y)} + f_2(x,y) \cdot f_3(x,y) + \log(f_3(x,y)) \\ &= xy + \cos(x^2+y^2) \cdot \mathrm{e}^x + x. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$Dh(x,y) = \big(y - 2x\sin(x^2+y)\mathrm{e}^x + \cos(x^2+y)\mathrm{e}^x + 1, x - \sin(x^2+y)\mathrm{e}^x\big).$$

(H 3)

(a) Berechnen Sie jeweils die Jacobimatrizen der folgenden Funktionen.

   (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 3x^2y + \exp(xz^2) + 4z^3,$

   (ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \big(xy,\ \cosh(xy),\ \log(1 + x^2)\big),$

   (iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \big(\log(1 + x^2 + z^2),\ z^2 + y^2 - x^2,\ 3\sin(xz)\big).$

(b) Bestimmen Sie $\partial_1 f(x, 1)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y-1)\cdot y + \log(y)\cdot x^7 \cdot \log(\log(1+\arctan(\frac{1+x^2y^4}{3+x^4+\sin^2(\arctan(yx))}))).$$

LÖSUNG: (a) (i) $Df(x, y, z) = \big(6xy + z^2\exp(xz^2), 3x^2, 2xz\exp(xz^2) + 12z\big)$

(ii)

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

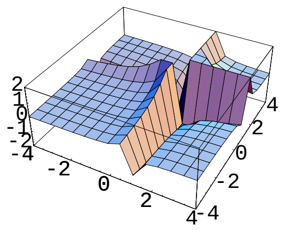
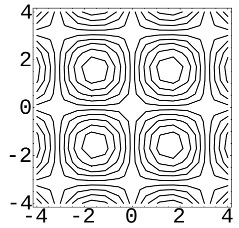
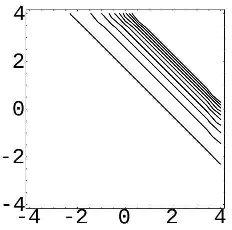
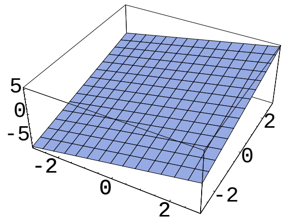
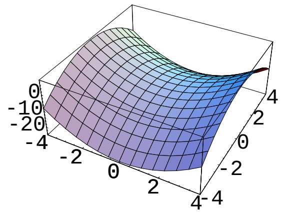
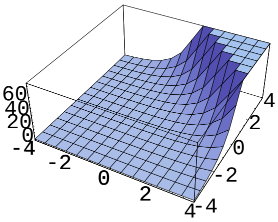
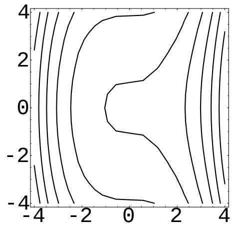
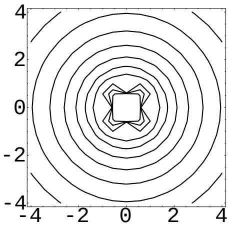
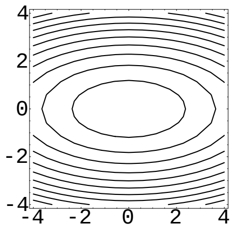
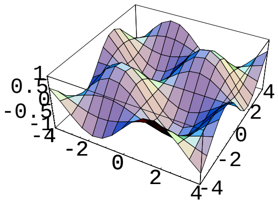
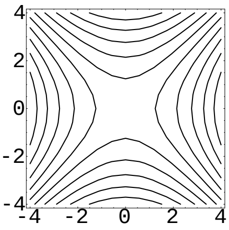
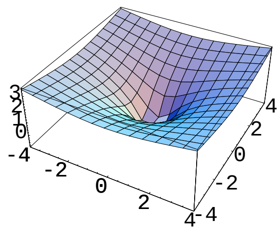
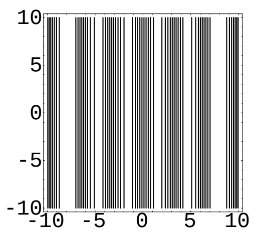
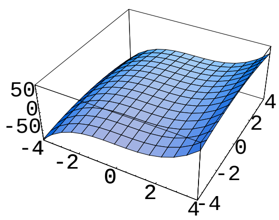
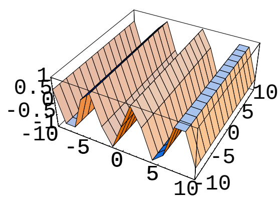
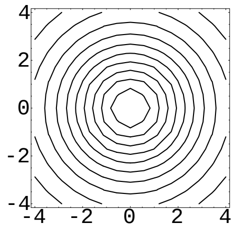
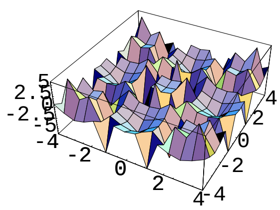
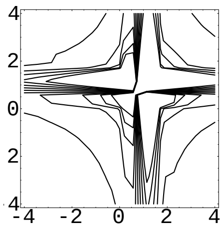
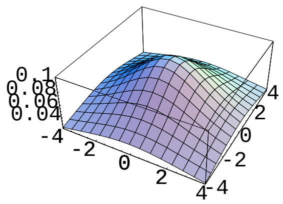
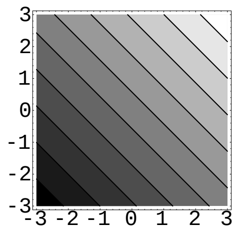
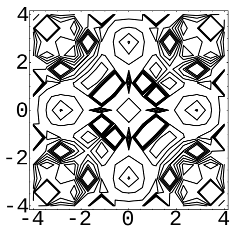
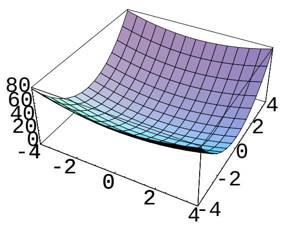
$$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+z^2} & 0 & \frac{2z}{1+x^2+z^2} \\ -2x & 2y & 2z \\ 3z\cos(xz) & 0 & 3x\cos(xz) \end{pmatrix}$$

(b) Mit Hilfe der Bemerkung nach Definition VII.1.7 im Skript ist $\partial_1 f(x, 1)$ gleich der Ableitung der Funktion $t \mapsto f(t, 1)$. Diese ergibt sich zu

$$f(t,1) = \cos(t)\cdot 1 + 0\cdot(\dots) = \cos(t).$$

Es gilt daher

$$\partial_1 f(x,1) = -\sin(x).$$


2
1
0
-1
-2
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

5
0
-5
-2 0 2
-2 0 2

0
-10
-20
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

60
40
20
0
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

1
0.5
0
-0.5
-1
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

3
2
1
0
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

10
5
0
-5
-10
-10 -5 0 5 10

50
0
-50
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

1
0.5
0
-0.5
-1
-10 -5 0 5 10
-10 -5 0 5 10

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

4
2
0
2
4
-4 -2 0 2 4

0.1
0.08
0.06
0.04
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4

3
2
1
0
-1
-2
-3
-3 -2 -1 0 1 2 3

4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

80
60
40
20
0
-4 -2 0 2 4
-4 -2 0 2 4