Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 14.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ betrachten wir wieder den Raum $C^1[a, b]$, vgl. Aufgabe (G2) auf Blatt 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $C^1[a, b]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist kein Banachraum.

(b) Versehen wir $C^1[a, b]$ dagegen mit der Norm $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ aus Aufgabe (G2) von Blatt 1, so ist $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

LÖSUNG: (a) Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$. Dann ist jedes f_n stetig differenzierbar, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Weiterhin konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Supremumsnorm, d.h. gleichmäßig, gegen die Grenzfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, denn

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \sqrt{x^2 + 1/n} - |x| \right| \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \frac{x^2 + 1/n - x^2}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \le \sup_{x\in[a,b]} \frac{1}{n\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, insbesondere ist sie dort auch eine Cauchyfolge. Damit ist sie auch eine Cauchyfolge im Teilraum $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Andererseits ist die Grenzfunktion f nicht differenzierbar, d.h. $f \notin C^1[a, b]$. Das bedeutet, dass die Folge$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ nicht konvergieren kann.

(b) *Behauptung:* $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Wir haben bereits in Aufgabe (G2) auf Blatt 1 gesehen, dass $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist, es bleibt also nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$. Da

$$\|f_m - f_n\|_\infty \le \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

gilt und da $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $f \in C[a, b]$.

Weiterhin ist jedes f_n' stetig und da

$$\|f_m' - f_n'\|_\infty \le \|f_m - f_n\| < \varepsilon,$$

gilt, konvergiert $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein f^* in $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Damit können wir Theorem IV.4.7 aus Analysis I anwenden und erhalten, dass f differenzierbar ist mit $f' = f^*$. Also ist $f \in C^1[a, b]$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N'$ sowohl $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ als auch $\|f' - f_n'\|_\infty < \varepsilon/2$ gilt. Damit ist $\|f - f_n\| < \varepsilon$ für all diese n und wir haben gezeigt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C^1[a,b], \|\cdot\|)$ gegen f konvergiert. □

(G 2)

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$, die mindestens zwei Punkte enthält, genau dann zusammenhängend ist, wenn sie ein Intervall ist.

LÖSUNG: *Behauptung:* M zusammenhängend $\iff$ M Intervall.

Beweis:

„⇒" Es sei $m_* := \inf M$, bzw. $m_* = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist und $m^* = \sup M$, bzw. $m^* = \infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist. Zuerst bemerken wir, dass $m_* \neq m^*$ gilt, da M mindestens zwei Elemente enthält. Wenn wir weiter zeigen können, dass $(m_*, m^*) \subseteq M$ gilt, sind wir fertig, denn dann kann M nur (m_*, m^*), $[m_*, m^*)$, $(m_*, m^*]$ oder $[m_*, m^*]$ sein, ist also in jedem Fall ein Intervall.

Nehmen wir an, dass $(m_*, m^*) \not\subseteq M$ gilt, so gibt es eine Zahl c mit $m_* < c < m^*$ und $c \notin M$. Setze $U := (-\infty, c)$ and $V := (c, \infty)$. Dann sind U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ und damit sind $U \cap M$ und $V \cap M$ offen in M. Außerdem ist $M = (U \cap M) \cup (V \cap M)$, denn $U \cup V = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ und $c \notin M$. Weiterhin haben wir $(U \cap M) \cap (V \cap M) = \emptyset$. Da m_* das Infimum von M ist und $m_* < c$ gilt, muss es ein $m_1 \in M$ mit $m_* \leq m_1 < c$ geben. Genauso findet man ein $m_2 \in M$ mit $c < m_2 \leq m^*$. Damit sind $U \cap M$ und $V \cap M$ auch noch nicht-leer, denn $m_1 \in U \cap M$ und $m_2 \in V \cap M$.

Zusammengenommen haben wir damit erhalten, dass M nicht zusammenhängend ist, da es in die Komponenten $U \cap M$ und $V \cap M$ zerfällt, und das steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

„⇐" Sei M ein Intervall. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir nun an, dass M nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es zwei nicht-leere Mengen $X, Y \subseteq M$, die in M offen sind und $X \cap Y = \emptyset$, sowie $M = X \cup Y$ erfüllen. Seien nun zwei beliebige Punkte $a \in X$ und $b \in Y$ gewählt und sei OBdA $a < b$ (sonst vertausche die Rollen von X und Y). Dann ist $[a,b] \subseteq M$, da M ein Intervall ist.

Wir betrachten die Menge $A := [a,b] \cap X$ und setzen $c := \sup A$. Dieses Supremum existiert, da A wegen $a \in A$ nicht leer und wegen $A \subseteq [a,b]$ beschränkt ist.

Nun ist Y in M offen, also ist X in M abgeschlossen und da auch $[a,b]$ in M abgeschlossen ist, ist A als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen und somit gilt $c \in A$. Damit ist aber auch $c \in X$, d.h. wir haben $c \neq b$, denn sonst wäre $c = b \in X \cap Y = \emptyset$ Wir haben also $c \in X \cap [a,b)$. Folglich gibt es dank der Offenheit von X in M ein $\varepsilon > 0$, so dass $[c, c+\varepsilon) \subseteq [a,b] \cap X = A$ ist, was einen Widerspruch zu $c = \sup A$ darstellt.

(G 3)

Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Mengen

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, für dass $\overline{U_\varepsilon(x)} \neq K_\varepsilon(x)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $X = (\mathbb{R} \setminus [1/2, 3/2]) \cup \{1\}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik.

LÖSUNG: Wir betrachten die Menge $X = (\mathbb{R} \setminus [1/2, 3/2]) \cup \{1\}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik und bilden in diesem metrischen Raum die Mengen $K_1(0)$ und $U_1(0)$. Offensichtlich gilt $1 \in K_1(0)$. Andererseits ist $U_1(0) = (-1, 1/2)$, d.h. $U_{1/2}(1)$ ist eine Umgebung von 1 mit

$$U_1(0) \cap U_{1/2}(1) = \emptyset.$$

Damit gilt $1 \notin \overline{U_1(0)}$.

Hausübungen

(H 1)

Beweisen Sie Satz 4.7 der Vorlesung, d.h. die folgenden Aussagen:

(a) Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.

(b) Jede zusammenhängende, offene Teilmenge M eines normierten Vektorraums ist wegzusammenhängend.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie für ein fest gewähltes $a \in M$ die Menge

$$E := \{x \in M : x \text{ ist mit } a \text{ verbindbar}\},$$

wobei x mit a *verbindbar* heißt, falls es ein Intervall $[\alpha, \beta]$ und eine stetige Funktion $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = x$ gibt. Zeigen Sie dann, dass E nicht-leer, offen und abgeschlossen in M ist.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist nicht jede zusammenhängende Menge auch wegzusammenhängend. Ein Beispiel ist die Menge $\{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ in $\mathbb{R}^2$.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* Ein metrischer Raum (M, d) ist wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ M ist zusammenhängend.

Beweis: Wir nehmen an M wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei offene, nicht-leere Mengen $U, V \subseteq M$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $M = U \cup V$. Da beide Mengen nicht leer sind, gibt es ein $u \in U$ und ein $v \in V$. Nun verwenden wir, dass M nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist. Das bedeutet: Es existiert ein Intervall $[\alpha, \beta]$ und eine stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ mit $\gamma(\alpha) = u$ und $\gamma(\beta) = v$.

Betrachtet man nun die Mengen $\gamma^{-1}(U)$ und $\gamma^{-1}(V)$, so stellt man fest, dass beide als Urbilder von offenen Mengen unter einer stetigen Abbildung offene Teilmengen von $[\alpha, \beta]$ sein müssen. Außerdem sind beide nicht-leer, denn es gilt $\alpha \in \gamma^{-1}(U)$ und $\beta \in \gamma^{-1}(V)$, und wegen $U \cap V = \emptyset$ ist auch $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$. Schließlich haben wir mit $M = U \cup V$ auch $[\alpha, \beta] = \gamma^{-1}(M) = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$. Zusammengenommen hätten wir also gefolgert, dass das Intervall $[\alpha, \beta]$ nicht zusammenhängend ist, im Widerspruch zu Aufgabe (G2). $\square$

(b) *Behautung:* $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, $M \subseteq V$ offen und zusammenhängend $\Longrightarrow$ M wegzusammenhängend.

Beweis: Es seien $a, b \in M$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass b mit a im Sinne des Hinweises verbindbar ist. Wir zeigen, dass für die Menge E aus dem Hinweis $E = M$ gilt, denn dann haben wir insbesondere $b \in E$ und sind fertig.

Dazu zeigen wir, dass E nicht leer, offen und abgeschlossen in M ist. Wäre dann $E \neq M$, so wäre auch $M \setminus E$ nicht-leer und offen und wir hätten $E \cap (M \setminus E) = \emptyset$, sowie $E \cup (M \setminus E) = M$. Damit wäre aber M nicht zusammenhängend und wir haben einen Widerspruch.

Zunächst ist E nicht leer, denn $a \in E$.

Wir beweisen die Offenheit von E in M: Sei $x \in E$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to M$, die x mit a verbindet, d.h. es gilt $\gamma_1(\alpha) = a$ und $\gamma_1(\beta) = x$. Desweiteren ist natürlich x auch in M und da M offen ist, gibt es eine Kugel $U_\varepsilon(x) \subseteq M$ für ein $\varepsilon > 0$. Für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ ist nun die Verbindungsstrecke $\gamma_2 : [0, 1] \to M$ mit $\gamma_2(t) = ty + (1 - t)x$, $t \in [0, 1]$, ganz in $U_\varepsilon(x)$ und damit ganz in M und die Abbildung γ_2 ist stetig. Setzen wir also

$$\gamma : [\alpha, \beta + 1] \to V \text{ mit } \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{falls } t \in [\alpha, \beta], \\ \gamma_2(t - \beta), & \text{falls } t \in (\beta, \beta + 1], \end{cases}$$

so ist γ stetig, denn es ist $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(0)$, es gilt $\gamma([\alpha, \beta+1]) \subseteq M$ nach Konstruktion und wir haben $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta+1) = y$. Damit ist also $y \in E$ für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ und E ist offen.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von E zu zeigen. Wir zeigen dazu, dass $M \setminus E$ offen ist. Sei $y \in M \setminus E$. Dann gibt es wieder wegen der Offenheit von M eine Kugel $U_\varepsilon(y) \subseteq M$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir nehmen an, dass $U_\varepsilon(y) \cap E \neq \emptyset$ ist. Dann gibt es ein x in dieser Menge, das nach Definition von E mit a durch einen Weg verbunden werden kann. Dann könnten wir aber genau wie in obiger Konstruktion durch Ankleben der Verbindungsstrecke von x und y (die ja ganz in $U_\varepsilon(y)$ und damit in M liegt) auch einen stetigen Weg von a nach y konstruieren, was ja gerade ausgeschlossen war. Also ist $U_\varepsilon(y) \subseteq M \setminus E$, d.h. $M \setminus E$ ist offen und damit ist E abgeschlossen in M. □

(H 2)

Zeigen Sie, dass es unstetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen gibt. Betrachten Sie dazu den normierten Vektorraum $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$, wobei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

bezeichnet und die Abbildung $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $T(f) := f(1)$.

LÖSUNG: Wir zeigen, dass die Abbildung aus der Aufgabenstellung linear aber nicht stetig ist. Seien dazu $f, g \in C[0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$T(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot T(f)$$

und

$$T(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = T(f) + T(g),$$

was bedeutet, das T linear ist.

Zum Nachweis der nicht-Stetigkeit, betrachten wir eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C[0,1]$, wobei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1},$$

woraus $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$ folgt. Das heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ gegen Null (genauer die Nullfunktion, die in diesem Vektorraum die Funktion des Nullvektors hat). Nun gilt zum Einen $T(f_n) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = 1$ und zum Anderen $T(\lim_{n\to\infty} f_n) = T(0) = 0$, also ist T nicht stetig.

(H 3)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es seien $A \subseteq M$ abgeschlossen und $K \subseteq M$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Weiterhin betrachten wir die Funktion $\operatorname{dist} : K \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{dist}(y) = \inf_{x\in A} \mathrm{d}(x,y), \quad y \in K.$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Funktion dist stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass A und K einen echt positiven Abstand haben, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\mathrm{d}(x,y) \geq \delta$ für alle $x \in A$ und $y \in K$ gilt.

(c) (*) Gilt die Aussage aus (b) auch für zwei abgeschlossene Teilmengen mit leerem Schnitt?

(*) Dieser Aufgabenteil ist als Anregung zum Nachdenken gedacht, er wird nicht bewertet.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $\mathrm{dist} : K \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis: Wir zeigen sogar, dass die Funktion dist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist, d.h. es gilt für alle $y, z \in K$ die Ungleichung $|\mathrm{dist}(y) - \mathrm{dist}(z)| \leq \mathrm{d}(y, z)$. Seien dazu $y, z \in K$ gegeben. Dann gibt es Dank des Infimums in der Definition von dist für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$, so dass $\mathrm{dist}(z) \geq \mathrm{d}(a, z) - \varepsilon$ ist. Da außerdem $\mathrm{dist}(y) \leq \mathrm{d}(a, y)$ gilt, haben wir

$$\mathrm{dist}(y) - \mathrm{dist}(z) \leq \mathrm{d}(a, y) - \big(\mathrm{d}(a, z) - \varepsilon\big) = \mathrm{d}(a, y) - \mathrm{d}(a, z) + \varepsilon.$$

Die Dreiecksungleichung liefert nun $\mathrm{d}(a, y) \leq \mathrm{d}(a, z) + \mathrm{d}(z, y)$, d.h. $\mathrm{d}(a, y) - \mathrm{d}(a, z) \leq \mathrm{d}(z, y)$ und somit haben wir

$$\mathrm{dist}(y) - \mathrm{dist}(z) \leq \mathrm{d}(z, y) + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Genauso erhält man durch vertauschen der Rollen von y und z die Ungleichung $\mathrm{dist}(z) - \mathrm{dist}(y) \leq \mathrm{d}(y, z) + \varepsilon$, woraus mit der Symmetrie der Metrik

$$|\mathrm{dist}(y) - \mathrm{dist}(z)| \leq \mathrm{d}(y, z) + \varepsilon$$

folgt. Da ε beliebig war, ist damit die Behauptung bewiesen. □

(b) *Behauptung:* Es gibt ein $\delta > 0$ mit $\mathrm{d}(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A$ und $y \in K$

Beweis: Anschaulich misst die Funktion dist für jeden Punkt $y \in K$ den Abstand dieses Punktes zur Menge A. Zu zeigen ist also, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\mathrm{dist}(y) \geq \delta$ für alle $y \in K$ ist, denn dann gilt für beliebige $x \in A$ und $y \in K$ sofort

$$\mathrm{d}(x, y) \geq \inf_{x \in A} \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{dist}(y) \geq \delta > 0.$$

Zunächst zeigen wir, dass $\mathrm{dist}(y) > 0$ für alle $y \in K$ gilt. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein $y \in K$ mit $\mathrm{dist}(y) = 0$. Dann gibt es (wegen des Infimums) eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(x_n, y) = 0$. Das bedeutet aber gerade, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M gegen y konvergiert. Da A abgeschlossen ist, muss dann $y \in A$ liegen, was aber wegen $A \cap K = \emptyset$ ausgeschlossen ist. Es gilt also $\mathrm{dist}(y) > 0$ für alle $y \in K$.

Das δ verschaffen wir uns nun mit dem üblichen Kompaktheitsargument. Da dist eine stetige Funktion von einem kompakten metrischen Raum nach $\mathbb{R}$ ist, nimmt diese nach Korollar VI.3.8 der Vorlesung ihr Minimum an. Es gibt also ein $y_0 \in K$ mit $\mathrm{dist}(y_0) = \min_{y \in K} \mathrm{dist}(y)$. Nach obiger Überlegung kann dieses Minimum aber nicht Null sein. Es gilt also

$$\mathrm{dist}(y) \geq \mathrm{dist}(y_0) =: \delta > 0 \quad \text{für alle } y \in K$$

und wir sind fertig. □

(c) Nein, in diesem Fall gilt die Aussage nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die beiden Mengen

$$A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{und} \quad A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x \text{ und } x \neq 0\}.$$

Dann ist A_1 offensichtlich abgeschlossen und es gilt $A_2 = f^{-1}(\{1\})$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$. Nun ist f stetig und $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, also ist nach Theorem VI.2.5 die Menge A_2 abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Weiter ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, aber mit $(n, 1/n) \in A_2$ und $(n, 0) \in A_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{d}\big((n, 0), (n, 1/n)\big) = \|(n, 0) - (n, 1/n)\|_2 = 1/n,$$

also wird der Abstand zwischen A_1 und A_2 beliebig klein.