Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 7.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Wir betrachten die „p-Normen" aus Beispiel 1.5 der Vorlesung. Beweisen Sie, dass für $1 \leq p \leq \infty$ die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch wirklich eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert und damit der Name p-Norm gerechtfertigt ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Höldersche Ungleichung. (Analysis I, Korollar IV.2.16)

Zeigen Sie weiter, dass die Einheitskugel $B_p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < 1\}$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$ konvex ist. Ist Ihr Beweis auch für eine beliebige Norm gültig?

(Eine Teilmenge M eines $\mathbb{R}$-Vektorraums heißt konvex, falls für alle $x, y \in M$ und alle $\lambda \in [0,1]$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ gilt.)

LÖSUNG: Aus der Definition folgt sofort, dass $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt. Die Homogenität ist ebenfalls einfach. Für $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_p &= (\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p)^{1/p} \\ &= |\lambda|(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \\ &= |\lambda|\|x\|_p\end{aligned}$$

und für $p = \infty$ gilt $\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty$.

Die Dreiecksungleichung für die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ folgt sofort aus den Eigenschaften des Absolutbetrags und des Maximums. Für $1 < p < \infty$ verwenden wir die Höldersche Ungleichung wie folgt:

Wir schreiben zunächst

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p$$

und schätzen dann weiter wie folgt ab

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}.$$

Wir wenden darauf die Höldersche Ungleichung auf jede Summe an. Es sei hierzu $q \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} .
\end{aligned}$$

Da $1 - 1/q = 1/p$ und $(p-1)q = p$ folgt somit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

was insbesondere die Dreiecksungleichung für die p-Norm liefert.

Die Konvexität der Einheitskugel folgt mit Hilfe der Homogenität und der Dreiecksungleichung. Für $x, y \in B_p(0,1)$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $\|\lambda x + (1-\lambda) y\|_p \leq \lambda \|x\|_p + (1-\lambda)\|y\|_p < \lambda + (1-\lambda) = 1$, also $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_p(0,1)$. Da wir nur die Eigenschaften einer Norm verwendet haben, ist klar, dass damit auch eine Kugel bezüglich einer beliebigen Norm konvex ist.

(G 2)

Für $f \in C^1[a,b]$ sei

$$\|f\| := \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad |||f||| := \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch $\| \cdot \|$ eine Norm auf $C^1[a,b]$ definiert ist, aber $||| \cdot |||$ keine Norm auf diesem Raum ist.

(b) Offenbar ist die Menge $N := \{f \in C[a,b] : |||f||| = 0\}$ ein Untervektorraum von $C^1[a,b]$. Zeigen Sie, dass N genau aus allen konstanten Funktionen besteht und bestimmen Sie die Dimension von N.

(c) Zeigen Sie, dass durch $f \sim g :\Leftrightarrow f - g \in N$ eine Äquivalenzrelation auf $C^1[a,b]$ definiert wird und bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[f]$ eines beliebigen Elements $f \in C^1[a,b]$. Bekanntlich wird die Menge

$$C^1[a,b]/N := \{[f] : f \in C^1[a,b]\}$$

der Äquivalenzklassen vermöge

$$[f] + [g] := [f+g], \quad \lambda[f] := [\lambda f], \qquad (f, g \in C^1[a,b], \lambda \in \mathbb{K})$$

zu einem Vektorraum, dem *Quotientenraum* von $C^1[a,b]$ bzgl. N.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$||| \cdot |||_N : C^1[a,b]/N \to [0,\infty), \quad |||[f]|||_N := \inf_{g \in [f]} |||g|||$$

wohldefiniert ist.

(e) Beweisen Sie, dass $(C^1[a,b]/N, ||| \cdot |||_N)$ ein normierter Raum ist.

LÖSUNG: 1. 1. $\|\cdot\|$ ist Norm:

Es iat klar, dass $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in C^1[a,b]$ gilt. Aus $\|f\| = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Es gilt für $f \in C^1[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= \max_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\lambda f'(x)| \\
&= |\lambda|(\max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|) \\
&= |\lambda|\|\lambda f\|.
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $f, g \in C^1[a,b]$:

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)+g'(x)| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |g(x)|) + \max_{x\in[a,b]} (|f'(x)| + |g'(x)|) \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| \\
&= \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

2. $|||\cdot|||$ ist keine Norm:

Es sei f_0 gegeben durch $f_0(x) = 1$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt $f_0 \in C^1[a,b] \setminus \{0\}$ und $|||f_0||| = 0$.

2. Es ist zu zeigen, dass $N = \{\lambda f_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Dies folgt aber sofort aus

$$\begin{aligned}
f \in N &\Leftrightarrow |||f||| = 0 \\
&\Leftrightarrow \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = 0 \\
&\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \\
&\Leftrightarrow f \text{ ist konstant} \\
&\Leftrightarrow \text{ Es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} : f = \lambda f_0
\end{aligned}$$

   N ist also der von f_0 aufgespannte Untervektorraum von $C^1[a,b]$ und ist damit eindimensional.

3. Reflexivität:

   Für $f \in C^1[a,b]$ gilt $f - f = 0 \in N$ also $f \sim f$

   Symmetrie:

   Es seien $f, g \in C^1[a,b]$ mit $f \sim g$, d.h. $f - g$ ist konstant. Dann ist auch $g - f$ konstant, also $g \sim f$.

   Transitivität:

   Es seien $f, g, h \in C^1[a,b]$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$, d.h. $f - g$ und $g - h$ sind konstant. Dann ist auch $f - h = (f-g) + (g-h)$ konstant.

   Da $g \in [f] \Leftrightarrow g - f$ konstant ist, gilt $[f] = \{f + c : c \in \mathbb{R}\}$.

4. Es sei $f \in C^1[a,b]$ und $g \in [f]$. Es ist zu zeigen, dass $\inf_{c\in\mathbb{R}} |||f+c||| = \inf_{c\in\mathbb{R}} |||g+c|||$ gilt.

   Aus (c) folgt, dass $g = f + c_0$ für ein $c_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Daher ist

$$\begin{aligned}
\inf_{c\in\mathbb{R}} |||f+c||| &= \inf_{c\in\mathbb{R}} |||g - c_0 + c||| \\
&= \inf_{c\in\mathbb{R}} |||g+c|||.
\end{aligned}$$

5. Es sei $|||[f]||| = 0$. Dann gilt $0 = \inf_{c\in\mathbb{R}} |||f+c||| = \inf_{c\in\mathbb{R}} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, also ist f konstant, d.h. $f \in [0]$ und damit $[f] = 0$.

   Die Homogenität und die Dreiecksungleichung folgen mit

$$\begin{aligned} |||[\lambda f]||| &= \inf_{c\in\mathbb{R}} \max_{x\in[a,b]} |(\lambda f + c)'(x)| \\ &= |\lambda| \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \\ &= |\lambda| |||[f]||| \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} |||f+g||| &= \inf_{c\in\mathbb{R}} \max_{x\in[a,b]} |(f+g+c)'(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |f'(x) + g'(x)| \\ &\le \max_{x\in[a,b]} (|f'(x)| + |g'(x)|) \\ &\le \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| \\ &= |||[f]||| + |||[g]|||. \end{aligned}$$

   Also ist $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C^1[a,b]/N$.

Hausübungen

(H 1)

Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen $d : M \times M \to [0,\infty)$ Metriken sind.

(a) $M \neq \emptyset$ beliebig und

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

(b) $M = \mathbb{R}^n$, $0 < p < 1$ und $d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(c) $M = \mathbb{R}$ und $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$.

(d) Es sei $M = \{(a_n)_{n\ge1}\}$ die Menge aller Folgen komplexer Zahlen und

$$d((a_n)_{n\ge1}, (b_n)_{n\ge1}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}.$$

LÖSUNG:

1. Es folgt direkt aus der Definition von d, dass $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ gilt. Außerdem ist die Symmetrie klar. Es seien $x, y, z \in M$. Ist $x = z$ so gilt offensichtlich $d(x,z) = 0 \le d(x,y) + d(y,z)$. Es sei nun $x \neq z$. Dann gilt $x \neq y$ oder $y \neq z$, also $d(x,y) = 1$ oder $d(y,z) = 1$. Also folgt $d(x,z) = 1 \le d(x,y) + d(y,z)$.

2. d ist keine Metrik, denn die Dreiecksungleichung gilt nicht. Um dies einzusehen wählen wir OBdA $n = 2$. Es gilt

$$d((1,0);(0,1)) = 2^{1/p} > 2$$

   da $p < 1$. Weiter gilt $d((1,0);(0,0)) = d((0,0);(0,1)) = 1$, also $d((1,0);(0,1)) > d((1,0);(0,0)) + d((0,0);(0,1))$.

3. Aus $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass arctan monoton wachsend ist. Also ist arctan insbesondere injektiv. Damit folgt aus $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = 0$, dass $x = y$ gilt. Die Symmetrie von d gilt offensichtlich. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |\arctan x - \arctan z| \\ &\leq |\arctan x - \arctan y| + |\arctan y - \arctan z| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

4. Wir schreiben $a = (a_n)_{n\geq 1}$ und $b = (b_n)_{n\geq 1}$. Aus $d(a,b) = 0$ folgt sofort, dass

$$2^{-n}\frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also muss $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Die Symmetrie von d ist wieder klar und die Dreiecksungleichung folgt unmittelbar aus der für $x, y, z \in \mathbb{C}$ gültigen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{|x-z|}{1+|x-z|} &= 1 - \frac{1}{1+|x-z|} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &\leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} \end{aligned}$$

(H 2)

Beweisen Sie Satz 2.2 c) und Satz 2.2 e) der Vorlesung. D.h. in einem metrischen Raum (M,d) gilt:

(a) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

(b) Eine Menge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist.

LÖSUNG: 1. Es sei (c_n) eine Cauchyfolge im metrischen Raum M. Dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(c_n, c_m) < \varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Es gibt daher ein $r > \frac{1}{2}$, so dass $d(c_i, c_N) < r$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gilt. Damit folgt aber sofort $c_n \in U_r(c_N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (c_n) beschränkt.

2. Es sei $A \subset M$ abgeschlossen und (a_j) eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} a_j = a$ wir nehmen an, dass $a \notin A$ gilt. Da $M \setminus A$ offen ist, gibt es eine Umgebung $U_r(a)$ mit $U_r(a) \cap A = \emptyset$, ein Widerspruch, da unendlich viele Folgeglieder in $U_r(a)$ liegen.

   Es sei nun umgekehrt A folgenabgeschlossen und nehmen an, dass $A^c = M \setminus A$ nicht offen ist. Dann gibt es ein $a \in A^c$ mit $U_r(a) \cap A \neq \emptyset$ für alle $r > 0$. Wir wählen für $r = 1/j$, $j \in \mathbb{N}$ ein $a_j \in U_r(a)$. Damit gilt aber $\lim_{j\to\infty} a_j = a \notin A$, was einen Widerspruch liefert.

(H 3)

Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

gilt.

LÖSUNG: Es sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |x_j|$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |x_j| \\
&= (|x_j|^2)^{1/2} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2} \\
&= \|x\|_2 \\
&= (\sum_{i=1}^{n} |x_j|^2 \frac{|x_i|^2}{|x_j|^2})^{1/2} \\
&\leq |x_j|\sqrt{n} \\
&= \sqrt{n}\|x\|_\infty
\end{aligned}$$