Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 2.7.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

14. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Lösung: Wir verwenden verallgemeinerte Polarkoordinaten. Genauer setzen wir

$$g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $E = g([0,1] \times [0, 2\pi))$ und

$$Dg(r, \varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}$$

außerdem $\det Dg = abr$. Mit der Transformationsformel folgt nun

$$Vol(E) = \int_E \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \pi ab$$

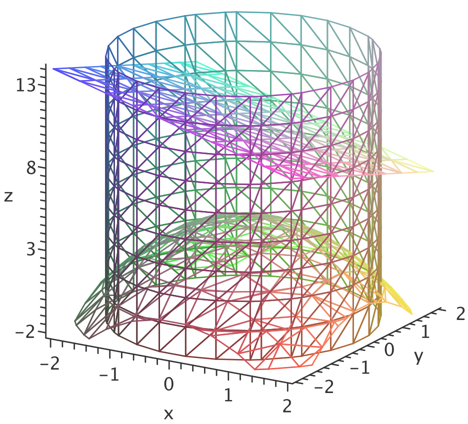
(T 2)

Es sei K der durch die Flächen $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$ (Zylinder), $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 10\}$ (Ebene) und $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 + y^2 = 4\}$ (Paraboloid) eingeschlossene Bereich. Berechnen Sie das Integral

$$I_z := \int_K (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

(Es handelt sich hierbei um das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse bei homogener Dichte 1)

Lösung: Der bereich K sieht so aus:



Wir rechnen in Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = t$. Dann gilt

- $x^2 + y^2 \leq 4, \Rightarrow r^2 \leq 4$, also $0 \leq r \leq 2$
- $z \geq 4 - (x^2 + y^2) \Rightarrow t \geq 4 - r^2$
- $z \leq 10 - x - y \Rightarrow t \leq 10 - r\cos\varphi - r\sin\varphi$
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

damit ist

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{4-r^2}^{10-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r^3 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3(10 - r\cos\varphi - r\sin\varphi - 4 + r^2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3(6 + r^2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 2\pi(6r^3 + r^5)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left(\frac{6}{4}r^4 + \frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\pi(24 + \frac{32}{3}) = \frac{208\pi}{3}
\end{aligned}$$

(T 3)

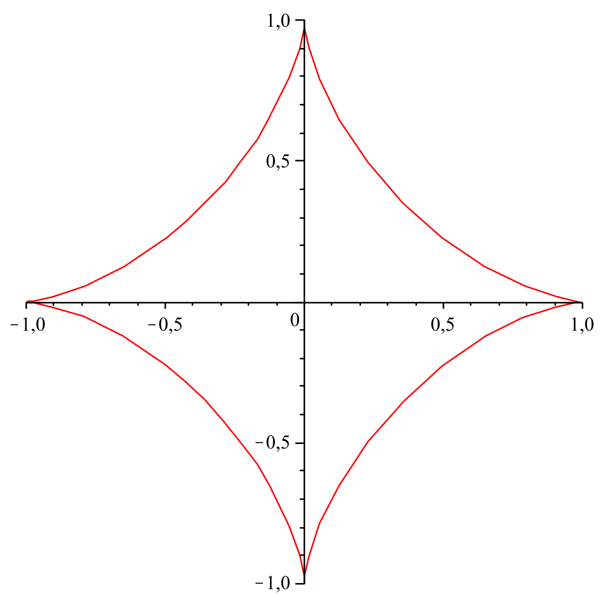
Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch die Spur der Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

begrenzten Bereichs.

Hinweis: Skizzieren Sie den Bereich zunächst. Es gilt außerdem $(\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32})' = \sin^2(t)\cos^2(t)$.

Lösung: Der Graph der Funktion ist



Wir berechnen den Flächeninhalt des Flächenstücks im rechten oberen Quadranten. Wir wählen $g(r,t) = (r\cos^3(t), r\sin^3(t))^T$, dann gilt $B_1 = g([0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}])$, wobei B_1 die besagte Teilfläche bezeichnet. Mit dem Transformationssatz gilt also

$$Vol(B_1) = \int_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 1 \cdot |\det J_g| \,\mathrm{d}(r,t).$$

Weiter ist

$$J_g(r,t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) & \sin^3(t) \\ -3r\cos^2(t)\sin(t) & 3r\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

also gilt $\det J_g(r,t) = 3r\sin^2(t)\cos^4(t) + 3r\cos^2(t)\sin^4(t) = 3r\sin^2(t)\cos^2(t)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} Vol(B_1) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r\cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 3r \cdot (\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32})|_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 -\frac{3\pi}{16} r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

Da wir nur ein Viertel des gesamten Bereichs berechnet haben ergibt sich insgesamt $Vol(B) = 4Vol(B_1) = \frac{3\pi}{8}$.