Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 25.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

13. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Der Membranmantel eines Kühlturms lässt sich als Rotationskörper darstellen. Dabei wird das Hyperbelstück

$$x^2 - z^2 = 1, \qquad -1 \le z \le 1,$$

um die z-Achse gedreht. Wie groß ist das Volumen der entstehenden Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1 + z^2,\ -1 \le z \le 1\}?$$

Lösung: Für jedes $\zeta \in [-1, 1]$ ist die Menge

$$A_3(\zeta) = M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \zeta\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 + \zeta^2\} \times \{\zeta\}$$

als Kreis messbar und ihr Flächeninhalt ergibt sich als π mal Quadrat des Radius' zu $\mu(A_3(\zeta)) = \pi(1 + \zeta^2)$. Damit gilt nach dem Prinzip von Cavalieri

$$\mu(M) = \int_{-1}^{1} \mu(A_3(\zeta))\, \mathrm{d}\zeta = \int_{-1}^{1} \pi(1 + \zeta^2)\, \mathrm{d}\zeta = \pi\big[\zeta + \frac{1}{3}\zeta^3\big]_{-1}^{1} = \pi(2 + \frac{2}{3}) = \frac{8}{3}\pi.$$

(T 2)

(a) Es seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass $A \subseteq H_j := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = c\}$ gilt, d.h. A ist in einer Hyperebene enthalten. Zeigen Sie, dass A messbar ist und $\mu(A) = 0$ gilt.

(b) Geben Sie eine Menge $D \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ an, die nicht messbar ist.

Lösung: (a) Es sei $K \ge 0$ so gewählt, dass $A \subseteq [-K, K]^n$ gilt. Das geht dank der Beschränktheit von A. Geben wir uns nun ein $\varepsilon > 0$ vor, so gilt mit $I_\ell = [-K, K]$ für $\ell \neq j$ und $I_j = [c - \varepsilon/(2^n K^{n-1}), c + \varepsilon/(2^n K^{n-1})]$

$$A \subseteq I := I_1 \times \cdots \times I_{j-1} \times I_j \times I_{j+1} \times \cdots \times I_n.$$

Da

$$\mu(I) = (2K)^{j-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2^n K^{n-1}} \cdot (2K)^{n-j} = \varepsilon$$

ist, gilt damit für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(A) \le \mu^*(I) = \mu(I) = \varepsilon.$$

Das liefert $\mu^*(A) = 0$ und wegen $0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) = 0$ muss damit auch $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$ sein. Das bedeutet, dass A messbar ist mit $\mu(A) = 0$.

(b) Setzen wir $D := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap [0,1]^2$, so gilt $I(D) = [0,1]^2$. Sei $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ eine Partition von $I(D)$. Dann gibt es kein j mit $I_j \subseteq D$, denn jedes I_j hat einen inneren Punkt und D hat keinen. Also ist

$$\mu_{P,*}(D) = \sum_{I_j \subseteq D} \mu(I_j) = 0$$

und damit

$$\mu_*(D) = \sup_P \mu_{P,*}(D) = 0.$$

Andererseits gilt $I_j \cap D \neq \emptyset$ für alle $j = 1, \ldots, m$, denn D liegt dicht in $[0,1]^2$. Also ist

$$\mu_P^*(D) = \sum_{I_j \cap D \neq \emptyset} \mu(I_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(I_j) = \mu(I(D)) = \mu([0,1]^2) = 1,$$

was

$$\mu^*(D) = \inf_P \mu_P^*(D) = 1$$

impliziert. Also ist $\mu_*(D) \neq \mu^*(D)$, d.h. D ist nicht Jordan-messbar.

(T 3)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch f^+, f^- und $|f|$ auf A Riemann-integrierbar sind und dass die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_A f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_A |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

gilt.

LÖSUNG: *Behauptung:* f^+ ist Riemann-integrierbar auf A.

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass $(f^+)_A = (f_A)^+$ ist, denn für $x \in A$ gilt $(f^+)_A(x) = f^+(x) = (f_A)^+(x)$ und für $x \notin A$ haben wir $(f^+)_A(x) = 0 = f_A(x) = (f_A)^+(x)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f auf A Riemann-integrierbar ist, existiert nach Satz XI.2.4 eine Partition $P = \{I_1, \ldots, I_m\}$ von $I(A)$, für die gilt

$$S_P(f_A) - s_P(f_A) < \varepsilon.$$

Für diese Partition haben wir mit obiger Vorbemerkung

$$S_P((f^+)_A) - s_P((f^+)_A) = \sum_{j=1}^{m} \bigl(\sup_{I_j} (f_A)^+ - \inf_{I_j} (f_A)^+\bigr) \mu(I_j).$$

Wir zeigen nun, dass $\sup_{I_j}(f_A)^+ - \inf_{I_j}(f_A)^+ \leq \sup_{I_j} f_A - \inf_{I_j} f_A$ gilt, denn dann haben wir

$$S_P((f^+)_A) - s_P((f^+)_A) \leq \sum_{j=1}^{m} \bigl(\sup_{I_j} (f_A) - \inf_{I_j} (f_A)\bigr) \mu(I_j) = S_P(f_A) - s_P(f_A) < \varepsilon$$

und f^+ ist nach Satz XI.2.4 Riemann-integrierbar auf A. Zum Nachweis dieser Ungleichung unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\sup_{I_j} f_A < 0$, so gilt $(f_A)^+ \equiv 0$ auf I_j. In diesem Fall haben wir dank $\inf_{I_j} f_A \leq \sup_{I_j} f_A$

$$\sup_{I_j} (f_A)^+ - \sup_{I_j} f_A = -\sup_{I_j} f_A \leq -\inf_{I_j} f_A = \inf_{I_j} (f_A)^+ - \inf_{I_j} f_A,$$

d.h.

$$\sup_{I_j} (f_A)^+ - \inf_{I_j} (f_A)^+ \leq \sup_{I_j} f_A - \inf_{I_j} f_A$$

wie gewünscht.

Ist dagegen $\sup_{I_j} f_A \geq 0$, so gilt $\sup_{I_j}(f_A)^+ = \sup_{I_j} f_A$. Außerdem ist wegen $f_A \leq (f_A)^+$ sofort $\inf_{I_j} f_A \leq \inf_{I_j}(f_A)^+$ und damit

$$\inf_{I_j}(f_A)^+ - \inf_{I_j} f_A \geq 0 = \sup_{I_j}(f_A)^+ - \sup_{I_j} f_A$$

und wir haben wieder die gewünschte Ungleichung. □

Behauptung: f^- und $|f|$ sind Riemann-integrierbar auf A.

Beweis: Da $f = f^+ - f^-$ ist, gilt $f^- = f^+ - f$ und damit ist mit f und f^+ nach Lemma XI.2.5 b) (vgl. Aufgabe (H1) von Übungsblatt 12) auch f^- Riemann-integrierbar. Genauso erhält man die Integrierbarkeit von $|f|$ dank $|f| = f^+ + f^-$. □

Behauptung: Es gilt die Dreiecksungleichung $\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Beweis: Es gilt nach der Definition des Betrages sowohl $f \leq |f|$ als auch $-f \leq |f|$. Mit der Linearität und der Monotonie des Integrals (Lemma XI.2.5 a) und c), vgl. Aufgabe (H1) auf Übugnsblatt 12) folgt damit (Man beachte, dass nach dem oben gezeigten auch $|f|$ Riemann-integrierbar ist).

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad -\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A (-f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Also ist

$$\left|\int_A f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_A |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

was zu zeigen war. □