Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 18.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

12. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für $0 < r < R$ hat dann die 2π-periodische Funktion $g(t) = f(re^{it})$ die Fourierreihe $S_\infty(g) = \sum_{n=0}^\infty r^n c_n \mathrm{e}^{int}$. Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um die folgenden Reihenwerte zu bestimmen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos nt}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$

LÖSUNG: (a) Es gilt $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$. Mit $f(z) = \mathrm{e}^z$ gilt also

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos nt}{n!} &= \operatorname{Re} f(\mathrm{e}^{it}) \\ &= \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}} = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\cos t + i \sin t} \\ &= \mathrm{e}^{\cos t} \operatorname{Re} \mathrm{e}^{i \sin t} \\ &= \mathrm{e}^{\cos t} \cos(\sin t)\end{aligned}$$

(b) Da $\cosh(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ berechnet man wie oben

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos 2nt}{(2n)!} &= \operatorname{Re} \cosh(\mathrm{e}^{it}) \\ &= \operatorname{Re} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{it}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{it}}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\cos t} \cos(\sin t) + \mathrm{e}^{-\cos t} \cos(-\sin t)\right) \\ &= \cosh(\cos t) \cdot \cos(\sin t).\end{aligned}$$

(T 2) (Partialbruchreihe des Cotangens und Eulersches Sinusprodukt)

(a) Beweisen Sie die folgende Darstellung für den Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right),$$

indem Sie die Fourierreihe von $f(x) = \cos(zx)$ für $x \in [-\pi, \pi]$ und $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ bestimmen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Darstellung für Cotangens die Produktdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) := \pi x \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

für alle $x \in (-1, 1)$.

Hinweis: Berechnen Sie Stammfunktionen von $\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

(c) Dehnen Sie die Formel aus (b) auf alle $x \in \mathbb{R}$ aus.

LÖSUNG: (a) Wir berechnen die Fourierreihe von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(zx)$, wobei $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Da f gerade ist, gilt $b_n = 0$ und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(zx) \cos(nx) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((z+n)x) + \cos((z-n)x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} (-1)^n \sin(z\pi) \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Da cos stetig differenzierbar ist, stimmt die Fourierreihe mit der Funktion überein, also gilt

$$\cos(zx) = \frac{\sin(z\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \cos(nx) \right).$$

Setzt man $x = \pi$ ein, so folgt die behauptete Darstellung des Cotangens.

(b) Nach Obigem gilt

$$\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $[-a, a]$, wobei $0 < a < 1$ und ist daher eine stetige Funktion. Die Stammfunktion der rechten Seite mit $F(0) = 0$ ist gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} \,\mathrm{d}t == \sum_{n=1}^\infty \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Andererseits ist die Stammfunktion der linken Seite mit $F(0) = 0$ gegeben durch

$$F(x) = \log \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$$

für $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Betrachten von e^F mit Hilfe der beiden Darstellungen liefert nun die Behauptung für $x \in (-1, 1)$. Die Formel gilt außerdem für $x = \pm 1$, da dann beide Seiten gleich 0 sind.

Die Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn die rechte Seite die Periode 2 hat. In der Tat gilt für die Partialprodukte

$$\begin{aligned} p_N(x) &= x\pi \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\ &= x\pi \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cdot (-(x-n)(x+n)) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} p_N(x+2) &= \lim_{N\to\infty} \left(p_N(x) \cdot \frac{(x+N+1)(x+N+2)}{(x-N)(x-N+1)} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} p_N(x) \end{aligned}$$

(T 3)

Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gibt deren Fourierreihe an mindestens einer Stelle $x_0 \in [0, 2\pi]$ nicht konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Resultate aus der Funktionalanalysis:

Für den stetigen Operator $T_g : C([0,2\pi]) \to \mathbb{R}$, $T_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, wobei $g \in C([0,2\pi])$, ist die Operatornorm gegeben durch $\|T_g\| = \int_0^{2\pi} |g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Satz von Banach-Steinhaus: Es seien X und Y Banachräume. Weiter seien $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkte, lineare Operatoren. Gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$ für alle $x \in X$, so gilt sogar $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

LÖSUNG: Jede stetige 2π-periodische Funktion kann mit einem Element des Banachraums $C_p = \{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ identifiziert werden. Wir nehmen an, dass die Fourierreihe jeder Funktion $f \in C_p$ an jeder Stelle konvergiert, das heißt die Partialsummen $s_n(f,t)$ konvergieren. Dann ist aber für jedes $t \in [-\pi,\pi]$ die Folge $s_n(f,t)$ auch beschränkt. Wir betrachten die Stelle $t = 0$. Der Satz von Banach-Steinhaus liefert, da $\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f,0)| < \infty$, dass auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n(\cdot,0)\| < \infty$. Mit der Darstellung

$$s_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(s)\,\mathrm{d}s$$

folgt, dass s_n einen stetigen, linearen Operator auf C_p definiert, womit die Anwendung des Satzes gerechtfertigt ist. Außerdem folgt

$$\|s_n(\cdot,0)\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)|\,\mathrm{d}s =: l_n < \infty,$$

und man rechnet

$$\begin{aligned}
l_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)s|}{|2\sin(s/2)|}\,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)s|}{|s|}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin z|\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin z|\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin z|\,\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

daraus folgt aber $l_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Also kann die Annahme nicht richtig gewesen sein.