Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 11.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

11. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Beweisen Sie Lemma 1.7 der Vorlesung:

(a) $BV[a,b] \subset B[a,b]$ und es gilt $|f(b) - f(a)| \le V_a^b(f)$;

(b) $BV[a,b]$ ist ein Vektorraum;

(c) Für $a < c < b$ gilt
$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f);$$

(d) Ist f monoton, so gilt $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$;

(e) Ist $f \in C^1([a,b])$, so gilt $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}t$.

Lösung: 1. Es gilt

$$\begin{aligned}|2f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a) + f(x) - f(b) + f(b)| \\ &\le |f(x) - f(a)| + |f(a)| + |f(x) - f(b)| + |f(b)| \\ &\le |f(a)| + |f(b)| + var_{Z_1}(f) \\ &\le V_a^b(f) + f(a) + f(b)\end{aligned}$$

wobei $Z_1 = \{a, x, b\}$.

Weiter gilt $V_a^b(f) = \sup_Z var_Z(f) \ge var_{Z_0}(f) = |f(b) - f(a)|$, wobei $Z_0 = \{t_0 = a, t_1 = b\}$.

2. Um zu zeigen, dass $BV[a,b]$ ein Vektorraum ist, genügt zu Zeigen, dass $BV[a,b]$ abgeschlossen unter der Skalarmultiplikation und der Addition ist. Die Vektorraumaxiome folgen, da $BV[a,b]$ eine Teilmenge des Vektorraums aller reellwertigen Funktionen ist.

   Sei also Z eine Zerlegung von $[a,b]$, dann gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}var_Z(\lambda f + \mu g) &= \sum_{i=1}^n |\lambda f(t_i) + \mu g(t_i) - \lambda f(t_{i-1}) + \mu g(t_{i-1})| \\ &\le |\lambda| var_Z(f) + \mu var_Z(g)\end{aligned}$$

   Übergang zum Supremum liefert die Aussage

$$V_a^b(\lambda f + \mu g) \le |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g)$$

   also insbesondere $\lambda f + \mu g \in BV[a,b]$, falls $f, g \in BV[a,b]$.

3. Es seien $a < c < b$ und Z eine Zerlegung von $[a,b]$.

   1. Fall: Es gibt ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so dass $t_k = c$.

   Dann sind $Z_1 = \{t_0, \dots, t_k\}$ bzw. $Z_2 = \{t_k, \dots, t_n\}$ jeweils Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, also folgt $var_{Z_1}(f) + var_{Z_2}(f) = var_Z(f)$ und damit gilt $V_a^c(f) + V_c^b(f) \le V_a^b(f)$, da auf der rechten Seite das Supremum über mehr Zerlegungen gebildet wird.

2. Fall: Es gibt kein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $c = t_k$.

Sei k der Index, so dass $t_k < c < t_{k+1}$ gilt. Für die Zerlegung $Z_c = \{t_0, \dots, t_k, c, t_{k+1}, \dots, t_n\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} var_{Z_c}(f) &= \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(c) - f(k)| + |f(t_{k+1}) - f(c)| + \sum_{i=k+2}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{k+1}) - f(k)| + \sum_{i=k+2}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= var_Z(f) \end{aligned}$$

also folgt

$$\sup_Z var_Z(f) \leq \sup_{Z, c \in Z} var_Z(f) = \sup_{Z, c \in Z} var_{Z_1}(f) + var_{Z_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

und damit die Behauptung.

4. 1. Fall: f monoton wachsend:

   Es sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann folgt

$$\begin{aligned} var_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) \\ &= f(t_n) - f(t_0) = |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

   2. Fall: f monoton fallend:

   Dann ist $-f$ monoton wachsend und da nach (b) $V_a^b(-f) = V_a^b(f)$, folgt nach dem ersten Fall $V_a^b(f) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|$.

5. Es sei $f \in C^1([a, b])$, dann gilt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} var_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}||f'(\tau_i) \end{aligned}$$

   mit Zwischenstellen $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Die letzte Summe ist eine Riemann-Summe für $|f'|$ und daher folgt, wenn man eine Folge von Zerlegungen betrachtet, deren Feinheit gegen 0 konvergiert, $V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$. In diesem Fall gilt nämlich $\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}||f'(\tau_i) \to \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$.

   Umgekehrt folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned} var_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} | \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) \, \mathrm{d}t| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

   also $V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$ und damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

(T 2)

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ durch

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass F die Integralbedingung erfüllt;

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von F längs des im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreises. Was fällt Ihnen auf?

(c) Berechnen Sie für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ eine Stammfunktion von F indem Sie das Kurvenintegral längs des Polygonzuges von $(1,0)$ nach (x,y) über den Punkt $(x,0)$ berechnen.

Lösung: 1. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_y \frac{-y}{x^2+y^2} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

und damit erfüllt F die Integralbedingung.

2. Der in positivem Sinne durchlaufene Einheitskreis wird durch $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Das Kurvenintegral ist daher

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass trotz Integralbedingung das Kurvenintegral nicht wegunabhängig ist. Sonst müsste es ja 0 sein! Dies liegt natürlich daran, dass das Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig ist. Es gibt also keine Stammfunktion von F auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3. Um das Integral zu berechnen bemerken wir zunächst, dass für die Strecke von $(1,0)$ nach $(x,0)$ der Integrand $F(\varphi(t))\varphi'(t)$ verschwindet. Daher verschwindet dieser Teil des Kurvenintegrals und es bleibt das Integral längs des Wegs von $(x,0)$ nach (x,y). Für diesen weg ist $\varphi(t) = (x, ty)$ eine parametrisierung und wir erhalten für die Stammfunktion V von F

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int_0^1 \left(\frac{-ty}{x^2+t^2y^2}, \frac{x}{x^2+t^2y^2} \right) \cdot (0,y)\ \mathrm{d}t \\ &= xy \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2y^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan \frac{ty}{x}\Big|_0^1 \\ &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\nabla V = F$ gilt.