Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 4.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

10. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Das Star Trek Außenteam ist wieder einmal in Not geraten. Sie müssen auf einem Planeten notlanden, um die schwer beschädigte Außenhülle des Shuttle zu reparieren. Allerdings gibt es auf dem Planeten eine Gravitationsanomalie, so dass das Shuttle nicht von jedem Punkt aus mit dem verbleibenden Treibstoff wieder starten kann. Dies gelingt nur, wenn Data einen Punkt auf der Oberfläche mit Gravitation kleiner als $1,3$ findet. Die Gravitation auf dem Planeten kann durch die Funktion $f(x, y, z) = x + y - z + \sqrt{6}$ beschrieben werden.

Aufgrund der äußerst unwirtlichen Oberfläche des Planeten, kann nur auf einem kleinen Bereich gelandet werden, ohne das Shuttle komplett zu zerstören. Dieser Bereich wird durch die Menge $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 1 \text{ und } 4x = 2z\}$ beschrieben.

Können Sie Data helfen, indem Sie entscheiden, ob das Schuttle vom Planeten wieder ins All gelangen kann? Oder wird das Außenteam auf Ewig auf diesem unwirtlichen Planeten gefangen sein?

Lösung: Wir bestimmen die Extremstellen der Funktion f auf T. Die Menge T ist beschränkt und abgeschlossen und daher kompakt. Also nimmt f auf T sein Maximum und sein Minimum an. Wir bestimmen die Kandidaten mit Hilfe der Lagrange Multiplikatorenregel. Hierzu sei

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := x + y - z + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1) + \mu(4x - 2z).$$

Für die Ableitung der Nebenbedingungen gilt

$$Dg = D\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da für alle $(x, y, z) \in T$ entweder $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gilt, folgt, dass Dg in jedem Punkt auf T surjektiv ist.

Wir suchen nun (x, y, z, λ, μ) mit

$$\begin{aligned}
\partial_1 L &= 1 + 2\lambda x + 4\mu \overset{!}{=} 0 \\
\partial_2 L &= 1 + 4\lambda y \overset{!}{=} 0 \\
\partial_3 L &= -1 - 2\mu \overset{!}{=} 0 \\
\partial_4 L &= x^2 + 2y^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \\
\partial_5 L &= 4x - 2z \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Aus $\partial_3 L = 0$ folgt unmittelbar $\mu = -\frac{1}{2}$. Dies liefert $\partial_1 L = -1 + 2\lambda x = 0$ also $\lambda = \frac{1}{2x}$. Andererseits folgt aus $\partial_2 L = 0$, dass $\lambda y = -\frac{1}{4}$. Einsetzen von λ liefert $y = -\frac{1}{2}x$. Wir setzen dies nun in die erste Nebenbedingung ein und erhalten $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{1}{6}}$. Damit folgt $y = \mp\sqrt{\frac{1}{6}}$ und

$z = \pm 4\sqrt{\frac{1}{6}}$. Die Kandidaten für die Extremstellen sind also $P_1 = (2\sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{\frac{1}{6}}, 4\sqrt{\frac{1}{6}})$ und $P_2 = (-2\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, -4\sqrt{\frac{1}{6}})$. Einsetzen in f ergibt $f(P_1) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und $f(P_2) = \sqrt{\frac{27}{2}}$. Das Minimum von f in T liegt also bei P_1. Da $f(P_1) \sim 1,22 < 1,3$ schafft es das Shuttle also schließlich, wenn das Schuttle bei P_1 landet.

(T 2)

(a) Zeigen Sie, dass der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\gamma(0) := 0$ und $\gamma(t) := t\cos^2(\pi/t)$ nicht rektifizierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein Lipschitz-stetiger Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ rektifizierbar ist.

LÖSUNG:

1. Der Weg γ ist stetig, da für jede Nullfolge t_n wegen $|\gamma(t_n)| = |t_n \cos^2(\pi/t_n)| \leq |t_n| \to 0$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $Z_n = \{t_0, \dots, t_{2n}\}$ mit $t_0 = 0$ und $t_j = \frac{2}{(2n+1-j)}$ für $1 \leq j \leq 2n$. Wegen

$$\gamma(t_j) = \begin{cases} 0, & j = 2k, \quad 0 \leq k \leq n, \\ t_j, & j = 2k+1, \quad 0 \leq k < n, \end{cases}$$

folgt

$$L_{Z_n}(\gamma) = \sum_{j=1}^{2n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = 2\sum_{k=0}^{n-1} t_{2k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \ (n \to \infty)$$

und daher ist γ nicht rektifizierbar.

2. Es sei λ die Lipschitz-Konstante von γ. Dann gilt für eine beliebige Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq \lambda \sum_{j=1}^{n} |t_j - t_{j-1}| = \lambda(b-a),$$

also ist γ rektifizierbar.

(T 3)

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = xy + \mathrm{e}^{xy}$ sowie die Menge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie alle globalen Extremwerte von f in K.

LÖSUNG: Es gilt

$$f_x(x,y) = y + y\mathrm{e}^{xy}$$
$$f_y(x,y) = x + x\mathrm{e}^{xy}.$$

Aus $f_x(x,y) = 0$ folgt $y = 0$ und aus $f_y(x,y) = 0$ folgt $x = 0$, also ist $(0,0)^T$ die einzige kritische Stelle. Die Hessematrix lautet

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\det H_f(0,0) = -4 < 0$, ist $(0,0)^T$ ein Sattelpunkt.

Wir müssen nun noch den Rand untersuchen. Da f und $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$ stetig partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 8y)^T \neq (0,0)^T$ für $(x,y)^T \in \partial K$ gilt, können wir hierzu den

Satz über „Extrema unter Nebenbedingungen“ verwenden. Nach Skript sind mögliche Kandidaten Lösungen von

$$
\begin{aligned}
0 &= y + y\mathrm{e}^{xy} + 2\lambda x \\
0 &= x + x\mathrm{e}^{xy} + 8\lambda y \\
0 &= x^2 + 4y^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Falls $\lambda = 0$ folgt wie oben, dass $x = y = 0$ die einzige Lösung ist. Da sie nicht auf ∂K liegt, muss sie nicht beachtet werden. Analog sieht man, dass $x = 0$ zu $y = 0$ und $y = 0$ zu $x = 0$ führt. Daher dürfen wir im Folgenden annehmen, dass $x, y, \lambda \neq 0$. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und subtrahieren danach die erste von der zweiten, erhalten wir $8\lambda y^2 - 2\lambda x^2 = 0$, d.h. $x^2 = 4y^2$. Einsetzen in die 3. Gleichung liefert die Kandidaten $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$. Wegen

$$
f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}, f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{8}}) = -\frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}
$$

wird das globale Maximum in $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{8}})^T$ und das globale Minimum in $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{8}})^T$ angenommen.