Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 28.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

9. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn M in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

LÖSUNG: *Behauptung:* M ist n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n \iff M$ ist offen in $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $x \in M$. Dann gibt es nach Definition eine offene Umgebung U von x, eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^n = V$$

ist. Damit ist $U \cap M = \varphi^{-1}(V) = U$ und folglich haben wir $U \subseteq M$, was bedeutet, dass eine Umgebung von x zu M gehört. Also ist M offen.

„$\Leftarrow$" Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x \in M$. Dann setzen wir $U := M$, $V := M$ und $\varphi := \mathrm{id}_M$. Dann ist offensichtlich φ ein Diffeomorphismus und es gilt $\varphi(U \cap M) = \varphi(M) = M = V = V \cap \mathbb{R}^n$. Also ist M eine n-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. □

(T 2)

Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und es gebe ein $M \in (0, 1)$ mit $|f'(t)| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

(a) Zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Lösung $(w, z) = g(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des Gleichungssystems

$$x + f(y) + z + \int_0^w \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t = 0$$
$$y + f(x) + w + \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bijektiv.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion g^{-1} in Abhängigkeit von f'.

LÖSUNG: (a) Auch wenn es sehr nach implizitem Funktionensatz aussieht, der hilft hier nicht weiter, denn wir wollen das Gleichungssystem ja nicht lokal sondern global auflösen.

Die globale Eindeutigkeit der Lösung unseres Gleichungssystems erhalten wir dagegen mit dem Banachschen Fixpuntksatz. Dazu definieren wir für jede Wahl von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $T_{x,y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T_{x,y}(w, z) = -\begin{pmatrix} x + f(y) + \int_0^w \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ y + f(x) + \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass Zahlen $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung des Gleichungssystems darstellen, wenn $T_{x,y}(w, z) = (w, z)^T$ gilt, d.h. genau dann wenn $(w, z) \in \mathbb{R}^2$ ein Fixpunkt von $T_{x,y}$ ist.

Seien also $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fest vorgegeben und $(w_1, z_1),\ (w_2, z_2) \in \mathbb{R}^2$ dann gilt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Analysis I für ein ξ zwischen w_1 und w_2, sowie ein η zwischen z_1 und z_2

$$\begin{aligned}
\|T_{x,y}(w_1, z_1) - T_{x,y}(w_2, z_2)\|_1 &= \left|\int_{w_2}^{w_1} \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{z_2}^{z_1} \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= |\mathrm{e}^{-\xi^2-1}||w_1 - w_2| + |\mathrm{e}^{-\eta^2-1}||z_1 - z_2| \\
&\le \frac{1}{\mathrm{e}}|w_1 - w_2| + \frac{1}{\mathrm{e}}|z_1 - z_2| = \frac{1}{\mathrm{e}}\|(w_1, z_1) - (w_2, z_2)\|_1
\end{aligned}$$

Da $1/\mathrm{e} < 1$ gilt, ist $T_{x,y}$ damit eine strikte Kontraktion auf $\mathbb{R}^2$, d.h. nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein $(w, z) \in \mathbb{R}^2$ mit $T_{x,y}(w, z) = (w, z)^T$, d.h. genau eine Lösung unseres Gleichungssystems.

Da $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, haben wir damit für jedes (x, y) genau eine Lösung $(w, z) =: g(x, y)$.

(b) Für die Bijektivität machen wir die ganze Argumentation umgekehrt. Sei also $(w, z) \in \mathbb{R}^2$ fix vorgegeben. Dann definieren wir die Funktion $S_{w,z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$S_{w,z}(x, y) := -\begin{pmatrix} f(y) + z + \int_0^w \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ f(x) + w + \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Dann lösen $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ wieder genau dann das Gleichungssystem, wenn (x, y) ein Fixpunkt von $S_{w,z}$ ist.

Für (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $\mathbb{R}^2$ erhalten wir dieses Mal mit dem Mittelwertsatz für die Ableitung dank der Voraussetzung an f

$$\begin{aligned}
\|S_{w,z}(x_1, y_1) - S_{w,z}(x_2, y_2)\|_1 &= |f(y_1) - f(y_2)| + |f(x_1) - f(x_2)| \\
&= |f'(\xi)|||x_1 - x_2| + |f'(\eta)||y_1 - y_2| \le M\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1
\end{aligned}$$

wobei ξ zwischen x_1 und x_2 und η zwischen y_1 und y_2 gewählt wurde.

Da $M < 1$ vorausgesetzt ist, haben wir damit wieder eine strikte Kontraktion auf $\mathbb{R}^2$, d.h. $S_{w,z}$ hat genau einen Fixpunkt $(x, y) =: h(w, z)$ für jedes $(w, z) \in \mathbb{R}^2$

Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest und $(w_0, z_0) = g(x_0, y_0)$, so dass x_0, y_0, w_0, z_0 eine Lösung des Gleichungssystems ist. Dann ist nach obigen Betrachtungen auch die Wahl x_1, y_1, w_0, z_0 mit $(x_1, y_1) := h(w_0, z_0)$ eine Lösung des Gleichungssystems. Da diese zu vorgegebenem (w_0, z_0) aber eindeutig sein muss, gilt $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, d.h.

$$(h \circ g)(x_0, y_0) = h(w_0, z_0) = (x_1, y_1) = (x_0, y_0).$$

Das bedeutet aber gerade, dass h eine Linksinverse von g ist. Genauso sieht man, wenn man mit vorgegebenem (w_0, z_0) startet, dass h eine Rechtsinverse ist. Also ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijektiv.

(c) Nun kommt doch noch der Satz über implizit definierte Funktionen. Wir definieren die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} x + f(y) + z + \int_0^w \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ y + f(x) + w + \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2-1}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$D_{(x,y)}F(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_{(w,z)}F(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-w^2-1} & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-z^2-1} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass wegen $|f'(t)| \leq M < 1$ insbesondere $f'(x)f'(y) > -1$ gilt und damit $D_{(x,y)}F(x,y,w,z)$ für alle Wahlen von $(x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4$ invertierbar ist. Gleiches gilt wegen $\mathrm{e}^{-w^2-z^2-2} - 1 < \mathrm{e}^{-2} - 1 < 0$ auch für $D_{(w,z)}F(x,y,w,z)$.

Sei nun (x,y,w,z) eine Lösung des Gleichungssystems, d.h. es gilt $g(x,y) = (w,z)$. Dann ist $F(x,y,w,z) = (0,0)^T$, F ist stetig differenzierbar und $D_{(w,z)}F(x,y,w,z)$ ist invertierbar. Also gibt es nach dem Satz über implizit definierte Funktionen eine eindeutige lokale Auflösung $\tilde{g}(x,y) = (w(x,y), z(x,y))$. Da g aber auch so eine Auflösung ist und diese eindeutig ist, gilt damit $\tilde{g} = g$. Der Satz über implizite Funktionen liefert uns zusätzlich die folgende Beziehung für die Ableitung:

$$Dg(x,y) = -\big(D_{(w,z)}F(x,y,w,z)\big)^{-1} \cdot D_{(x,y)}F(x,y,w,z).$$

Man beachte, dass beide Matrizen auf der rechten Seite nach unseren bisherigen Überlegungen invertierbar sind.

Nun gilt dank der Bijektivität von g

$$Dg^{-1}(g(x,y)) \cdot Dg(x,y) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},$$

d.h.

$$\begin{aligned} Dg^{-1}(w,z) = Dg^{-1}(g(x,y)) = Dg(x,y)^{-1} &= -\big(D_{(x,y)}F(x,y,w,z)\big)^{-1} \cdot D_{(w,z)}F(x,y,w,z) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-w^2-1} & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-z^2-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - f'(x)f'(y)} \begin{pmatrix} -1 & f'(y) \\ f'(x) & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-w^2-1} & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-z^2-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$